JOURNAL OF ALGEBRA 41, 365–397 (1976)

Topologies Lineaires et Modules Artiniens*

BERNARD BALLET

58, Avenue des Caillols, 13012 Marseille, France

Communicated by G. Higman

Received June 17, 1971

À MA MÈRE

INTRODUCTION

Le travail qui suit est essentiellement consacré aux topologies artiniennes sur un anneau ou un module: une topologie sur un anneau A (resp. un module M) est artinienne $\Leftrightarrow$ elle est linéaire et pour tout idéal ouvert $\mathscr{T}_\alpha$ (resp. tout sous module ouvert M_α), $A/\mathscr{T}_\alpha$ (resp. M/M_α) est un A-module artinien. La plupart des résultats obtenus concernent le cas commutatif.

On commence par une étude des modules artiniens dans le chapitre I, étude entreprise dans [12, 13] dans le cas où l'anneau de base est noethérien. On montre d'abord que tout module artinien est somme directe de sous-modules ayant un seul idéal maximal associé (modules antiprimaires). On démontre dans un second paragraphe un théorème de structure des modules artiniens: tout module artinien sur un anneau quelconque peut être considéré comme un module artinien sur un anneau noethérien semi-local complet.

Au chapitre II, on étudie les anneaux topologiquement artiniens. Le séparé complété $\hat{A}$ d'un anneau topologiquement artinien A s'interprète comme un anneau d'endomorphismes $\mathrm{Hom}_A(\mathscr{C}E, E)$ où E est "l'injectif essentiel" associé à A et $\mathscr{C}E$ l'ensemble des éléments annulés par un idéal ouvert de A. On en déduit des propriétés d'exactitude du foncteur complétion et des critères de platitude du A-module $\hat{A}$. On donne ensuite la structure des anneaux topologiquement artiniens séparés complets (slc) qui n'est pas sans rappeler les théorèmes de structure des anneaux locaux noethériens complets de I. S. Cohen.

* 1re Thèse présentée au Centre d'Orsay, Université Paris, Sud pour obtenir le grade de Docteur es Sciences Mathématiques, Juin 1971.

On introduit au chapitre III la notion de topologie d'Artin Rees sur un anneau: ce sont des topologies linéaires telles que pour tout A-module M de présentation finie et tout sous module N de type fini et tout idéal ouvert $\mathscr{T}$, il existe un idéal ouvert $\mathscr{T}'$ tel que $\mathscr{T}N \supset \mathscr{T}'M \cap N$ (condition $RF(M)$). Si $\mathbf{C}$ est la sous catégorie fermée de Mod A au sens de [8] correspondant à la topologie donnée $\mathscr{C}$ sur A, on montre que $\mathscr{C}$ est d'Artin Rees $\Leftrightarrow$ le plus grand sous module de tout module injectif situé dans $\mathbf{C}$ est absolument pur. L'exemple des anneaux slc non noethériens montre que cette condition est strictement plus faible que la condition de stabilité de $\mathbf{C}$ par enveloppes injectives [8, Chap. V]. Quand $\mathscr{C}$ est d'Artin Rees, le foncteur complétion transforme suites exactes de modules de présentation finie en suites "presque" exactes, résultats obtenus grâce au lemme de densité (Sect. 1). Quand l'anneau est cohérent, pour qu'une topologie soit d'Artin Rees, il faut et il suffit que $RF(A)$ soit vraie. On peut alors compléter certains résultats du chapitre II concernant la platitude du séparé d'un anneau topologiquement artinien.

Dans un dernier paragraphe, on étudie comme application du lemme de densité le contre module d'un cogénérateur injectif, on montre que c'est un module absolument pur mais non injectif en général; dans le cas où il est injectif, on rejoint des situations décrites dans [9, Chap. V; 14].

Je suis profondément reconnaissant à Monsieur P. Samuel pour l'aide tant scientifique que morale qu'il m'a apportée. Nos relations, souvent épistolaires à cause de l'éloignement, ont pourtant joué un rôle décisif dans la réalisation de ce travail.

Les conversations que j'ai eues avec mon ami R. Goblot ont été très fructueuses, qu'il soit ici particulièrement remercié.

Je dois aussi beaucoup à ma femme, Suzanne, pour les encouragements qu'elle n'a cessé de me donner et pour son soutien moral.

Je remercie Monsieur V. Poenaru, pour l'intéressant second sujet qu'il m'a proposé.

Enfin, je remercie Mme Martin, du Service de Mathématiques, du C.S.U. d'Avignon, qui a bien voulu se charger du travail de dactylographie.

I. Modules Artiniens

1. *Décomposition antiprimaire*

On se donne dans ce paragraphe un anneau commutatif unitaire quelconque et un module artinien sur cet anneau dont on se propose d'étudier l'assassin. Les résultats obtenus sont bien connus quand le module est de longueur finie, aussi pouvons nous commencer par donner un premier exemple de module artinien non noethérien:

Proposition 1.1. *Soit A un anneau dans lequel il existe un idéal maximal engendré par un élément a non diviseur de 0, alors si i désigne l'application canonique $A \to A_a$, le module $A_a/i(A)$ est artinien non noethérien.*

Il suffit de remarquer que tous les sous modules de $A_a/i(A)$ sont principaux et engendrés par les classes des éléments $1/a^n$ de A_a.

Dans toute la suite de ce paragraphe A désigne un anneau commutatif unitaire quelconque.

Proposition 1.2. *Soit M un A-module artinien. Alors:*

(i) *Pour que* $\mathrm{Ass}(M)$ *ne soit pas vide, il faut et il suffit que* $M \neq \{0\}$.

(ii) *Tout élément de* $\mathrm{Ass}(M)$ *est un idéal maximal de* A.

(iii) $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Supp}(M)$.

(iv) $\mathrm{Ass}(M)$ *a un nombre fini d'éléments.*

(i) La condition est évidemment nécessaire. Inversement si $M \neq \{0\}$, soit N un sous module minimal non nul de M, alors N est simple et son annulateur est un idéal maximal de A.

(ii) Soit $\mathrm{Ann}\, x = p \in \mathrm{Ass}(M)$. Si $a \in A$, $a \notin p$, il existe un entier $s > 0$ tel que $Aa^s x = Aa^{s+1}x$, donc $b \in A$ tel que $a^s(1 - ab)x = 0$ et comme $a^s \notin p$, $1 - ab \in p$ et A/p est un corps.

(iii) On a toujours $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Supp}(M)$. L'inclusion opposée résulte du lemme suivant:

Lemme. *Soit S une partie multiplicative de A, ψ l'ensemble des idéaux maximaux de A qui ne rencontrent pas S, M un A-module artinien. Alors l'application $m \to S^{-1}m$ est une bijection de* $\mathrm{Ass}_A(M) \cap \psi$ *sur* $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$.

En vertu de [6, Chap. IV, Sect. 1, Proposition 5], il suffit de montrer que cette application est surjective. Or si m est tel que $S^{-1}m = \mathrm{Ann}(x/t)$ où $x \in M$ et $t \in S$, on a $m = \mathrm{Ann}(s_0 x)$ où $(s_0 x)$ est un élément minimal de la famille des sous modules monogènes de M de la forme (sx) où $s \in S$.

Si p est maintenant un élément de $\mathrm{Supp}(M)$, il existe d'après le lemme appliqué à $S = A - p$, un élément $m \in \mathrm{Ass}\, M$ tel que $m \subset p$ donc $p = m$ puisque m est maximal.

(iv) Les sous modules monogènes (x) de M tels que $\mathrm{Ann}\, x \in \mathrm{Ass}\, M$ sont simples d'après (ii), l'assertion résulte donc du fait que le socle d'un module artinien est de longueur finie.

Corollaire 1. *Si N est un sous module de M,* $\mathrm{Ass}\, M = \mathrm{Ass}\, N \cup \mathrm{Ass}\, M/N$; *c'est une conséquence immédiate de* (iii).

COROLLAIRE 2. *Avec les notations du lemme, le noyau de l'application canonique $M \to S^{-1}M$ est l'unique sous module de M qui vérifie les relations* $\operatorname{Ass} N = \operatorname{Ass} M - (\not{p} \cap \operatorname{Ass} M)$ *et* $\operatorname{Ass} M/N = \not{p} \cap \operatorname{Ass} M$.

En vertu de (i), ceci se démontre comme [6, Chap. IV, Sect. 1, Proposition 6].

Nous caractérisons maintenant les modules artiniens dont l'assassin est réduit à un seul élément.

PROPOSITION 1.3. *Soit M un A-module artinien. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) $\operatorname{Ass}(M)$ *est réduit à un seul élément.*

(b) $M \neq \{0\}$ *et toute homothétie est, soit bijective, soit presque nilpotente.*

On dira alors que M est *antiprimaire*; si m est l'ensemble des $a \in A$ tels que l'homothétie de rapport a soit presque nilpotente, on a $\operatorname{Ass}(M) = \{m\}$.

Même démonstration que [6, Chap. IV, Sect. 2, Proposition 1] en vertu de (i) et en remarquant que dans un module artinien, tout endomorphisme injectif est surjectif [5, Chap. VIII, Sect. 2, Proposition 4, Lemme 3].

PROPOSITION 1.4. *Soit M un A-module artinien, $(Q_i)_{i\in I}$ une famille de sous modules de M antiprimaires et posons* $\operatorname{Ass} Q_i = \{m_i\}$. *Alors*:

(a) *Si pour tout i, $m_i = m$, $\sum_{i\in I} Q_i$ est m-antiprimaire* (*i.e.*, $\operatorname{Ass} \sum Q_i = \{m\}$).

(b) *Si $i \neq j$ implique $m_i \neq m_j$, $\sum_{i\in I} Q_i = \bigoplus_{i\in I} Q_i$.*

(a) En effet $\operatorname{Ass}(\sum_{i\in I} Q_i) = \operatorname{Supp}(\sum Q_i) = \bigcup \operatorname{Supp} Q_i = \{m\}$.

(b) Soit $i \in I$, alors $\operatorname{Ass}(Q_i \cap \sum_{j\neq i} Q_j) = \varnothing$ donc $Q_i \cap \sum_{j\neq i} Q_j = \{0\}$ (Proposition 1.2(i)).

DÉFINITION. Soit M un A-module artinien. On appelle décomposition antiprimaire de M une famille finie $(Q_i)_{i\in I}$ de sous modules de M telle que $M = \sum_{i\in I} Q_i$. Posant $\operatorname{Ass} Q_i = \{m_i\}$, on dira que cette décomposition est réduite si $i \neq j \Rightarrow m_i \neq m_j$; on aura alors $M = \bigoplus Q_i$ en vertu de 1.4. Voici alors le résultat essentiel de ce paragraphe:

THÉORÈME. *Soit M un A-module artinien. Il existe une décomposition antiprimaire réduite et une seule de M, $M = \bigoplus_{i\in I} Q_i$; si l'on pose* $\operatorname{Ass} Q_i = \{m_i\}$, *$Q_i$ est égal au saturé de* 0 *relativement à la partie multiplicative $\bigcap_{j\neq i} \complement m_j$ et en tant que A-module, il est isomorphe à M_{m_i}.*

Existence. Posons $\operatorname{Ass} M = \{m_i\}_{i\in I}$, il existe d'après [6, Chap. IV, Sect. 1, Proposition 4] pour tout $i \in I$ un sous module Q_i tel que Ass $Q_i = \{m_i\}$ et Ass $M/Q_i = \{m_j\}_{j \neq i}$; la somme $\sum Q_i$ est alors directe et Ass $M/\sum_{i \in I} Q_i \subset \bigcap_{i \in I}$ Ass M/Q_i (Proposition 1.2, Corollaire 1) $= \varnothing$ donc $M = \sum Q_i$. D'après (Proposition 1.2, Corollaire 2) Q_i est égal au saturé de 0 relativement à la partie multiplicative $\bigcap_{j \neq i} \complement m_j$; d'autre part $M_{m_i} = \bigoplus (Q_j)_{m_i}$, si $j \neq i$ $\exists \alpha \in m_j$ et $\notin m_i$ et pour tout $x \in Q_j$, $\exists n$ tel que $\alpha^n x = 0$ (Proposition 1.3) donc $(Q_j)_{m_i} = 0$ par contre si $j = i$ $(Q_i)_{m_i} = Q_i$ d'après cette même Proposition 1.3.

Unicité. Soit $M = \sum_{k \in K} Q_k'$ une autre décomposition antiprimaire réduite. Tout d'abord card K = card I = card Ass M. Si $k \in K$, $\exists i(k)$ tel que Ass $Q_k' = \{m_{i(k)}\}$ et comme $M/Q_k' = \sum_{l \neq k} Q_l'$, Ass $M/Q_k' = \{m_j\}_{j \neq i(k)}$ donc $Q_k' = Q_{i(k)}$ (Proposition 1.3). CQFD.

COROLLAIRE. *Tout module artinien est somme directe de sous-modules antiprimaires.*

Les deux propositions qui suivent montrent que les notions de module antiprimaire et de décomposition antiprimaire se localisent bien:

PROPOSITION 1.5. *Soient M un A-module, S une partie multiplicative de A, N un sous-module de M, m un idéal maximal de A, i l'application canonique $M \to S^{-1}M$. Alors:*

(i) *Si $m \cap S \neq 0$ et si N est m antiprimaire, on a $S^{-1}N = \{0\}$.*

(ii) *Si $m \cap S = \varnothing$ pour que N soit m antiprimaire dans M, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $i^{-1}(N')$, où N' est un sous-$S^{-1}A$-module de $S^{-1}M$, $S^{-1}m$ antiprimaire; on a alors $N' = S^{-1}N$.*

PROPOSITION 1.6. *Soient M un A-module, S une partie multiplicative de A, N un sous module de M, $N = \sum_{i \in I} Q_i$ la décomposition réduite de N. On désigne J la partie de I formée des indices i tels que $m_i \cap S = \varnothing$, où m_i est l'unique élément de* Ass(Q_i), *alors:*

(i) *$\sum_{i \in J} S^{-1}Q_i$ est la décomposition réduite de $S^{-1}N$.*

(ii) *Si N désigne le saturé de N et O_S le saturé de* 0 *relativement à S dans M, on a $N' = \sum_{i \in J} Q_i \oplus O_S$.*

Proposition 1.5 et le (i) de Proposition 1.6 se démontrent comme les propositions 3 du n° 1 et 6 du n° 4 de [6, Chap. 4, Sect. 2] pour le (ii) de Proposition 1.6, il suffit de remarquer que Ass $N' = \{m_i\}_{i \in J} \cup$ Ass O_S et que Ass $O_S \cap \{m_i\}_{i \in J} = \varnothing$. Voyons maintenant quelques applications et tout d'abord la détermination du radical d'un module artinien.

PROPOSITION 1.7. *Soient M un A-module artinien, $M = \bigoplus_{i \in I} Q_i$ la* *décomposition antiprimaire réduite de M et posons pour tout $i \in I$* Ass $Q_i = \{m_i\}$. *Alors le radical de M est égal à $\bigoplus m_i Q_i$.*

D'abord on a $\mathscr{R}(M) = \bigoplus_{i \in I} \mathscr{R}(Q_i)$. Pour tout $i \in I$, $Q_i/m_i Q_i$ est un A/m_i espace vectoriel artinien donc de dimension finie et $Q_i/m_i Q_i$ est un A-module semi simple donc sans radical et $\mathscr{R}(Q_i) \subset m_i Q_i$. Maintenant si N est un sous module maximal de Q_i, Q_i/N est simple et comme $\operatorname{Ass} Q_i/N \subset \operatorname{Ass} Q_i = \{m_i\}$, $N \supset m_i Q_i$, donc $\mathscr{R}(Q_i) \supset m_i Q_i$.

Remarque. Si M est de longueur finie, on a $\mathscr{R}(M) \neq M$. Si M n'est pas de longueur finie, on verra plus loin (Proposition 2.5, remarque) qu'on peut avoir aussi bien $M = \mathscr{R}(M)$ que $M \neq \mathscr{R}(M)$.

On va montrer maintenant que pour étudier un module artinien M sur un anneau commutatif A, on peut toujours supposer que A est un anneau semi local, ce qui constitue une première étape dans l'étude de la structure des modules artiniens qui fait l'objet du paragraphe suivant.

PROPOSITION 1.8. *Soit A un anneau, m un idéal maximal de A, i l'application canonique $A \to A_m$, M un A_m-module. Pour que M soit artinien (resp. de longueur finie), il faut et il suffit que le A-module $i_*(M)$ soit artinien (resp. de longueur finie).*

La condition est évidemment suffisante. Inversement soit $(M_n)_{n \geqslant 0}$ une suite décroissante de sous A-modules de $i_*(M)$, alors il existe un entier n tel que $(M_n)_m = (M_{n+1})_m$. Soit $x \in M_n/M_{n+1}$, $\exists t \notin m$ tel que $tx = 0$ d'autre part d'après Proposition 1.3, $m \subset (\operatorname{Ann} x)^{1/2}$, ce qui implique $\operatorname{Ann} x = A$ puisque m est maximal donc $x = 0$ et $M_n = M_{n+1}$.

Remarquons que la proposition est fausse si m remplace artinien par noethérien: $\mathbb{Z}$ désignant l'anneau des entiers et p un nombre premier, $\mathbb{Z}_{(p)}$ est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-module noethérien mais non un $\mathbb{Z}$-module noethérien.

PROPOSITION 1.9. *Soient A un anneau et M un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1°) *M est un A-module artinien (resp. de longueur finie).*

(2°) *Il existe une famille finie d'idéaux maximaux $(m_i)_{i \in I}$ de A telle que M soit somme directe finie de A_{m_i}-modules artiniens (resp. de longueur finie).*

(3°) *Il existe un anneau semi local B et un homomorphisme $\rho: A \to B$ de telle sorte que les conditions suivantes soient satisfaites:*

(i) *B est une A-algèbre plate.*

(ii) *Si $(n_j)_{j \in S}$ est la famille finie des idéaux maximaux de B, l'annulateur de tout élément non nul de M est contenu dans $\bigcup_{j \in S} \rho^{-1}(n_j)$ et l'homomorphisme $A_{\rho^{-1}(n_j)} \to B_{n_j}$ déduit de ρ est bijectif pour tout $j \in S$.*

(iii) *$M \otimes_A B$ est un B-module artinien (resp. de longueur finie). De plus, pour que $m \in \mathrm{Ass}_A M$, il faut et il suffit qu'il existe $n \in \mathrm{Ass}_B(M \otimes_A B)$ tel que $\rho^{-1}(n) = m$.*

(1°) implique (2°) d'après le théorème, l'implication inverse résultant de Proposition 1.8. Si (2°) est vérifiée, l'anneau $B = \prod_{i \in I} A_{m_i}$ a les propriétés (i) et (ii) de (3°) et l'on a, à des isomorphismes près, $M \otimes_A B = \sum_{i \in I} M \otimes_A A_{m_i} = \sum M_{m_i}$; or les M_{m_i} étant des A_{m_i}-modules artiniens (resp. de longueur finie) sont aussi des B-modules artiniens (resp. de longueur finie), d'où (iii).

Si (3°) a lieu, en posant $\mathrm{Ass}_B(M \otimes_A B) = \{n_k\}_{k \in K}$, on a, en vertu du théorème $M \otimes_A B = \sum_{k \in K} (M \otimes_A B)_{\otimes_B} B_{n_k} = \sum_{k \in K} M \otimes_A A_{\rho^{-1}(n_k)}$ d'où un isomorphisme de A-modules $M \otimes_A B \to \sum_{k \in K} M_{\rho^{-1}(n_k)}$; l'homomorphisme canonique $M \to \sum_{k \in K} M_{\rho^{-1}(n_k)}$ est le composé de cet isomorphisme et de l'homomorphisme $M \to M \otimes_A B$ qui est injectif en vertu de (i) et (ii), donc il est injectif et comme chacun des $M_{\rho^{-1}(n_k)}$ est $A_{\rho^{-1}(n_k)}$-artinien (resp. de longueur finie) donc A-artinien (resp. de longueur finie) d'après Proposition 1.8, M est bien artinien (resp. de longueur finie) d'où (1°)).

Enfin, si $n \in \mathrm{Ass}_B(M \otimes_A B)$, $\rho^{-1}(n)$ est premier et si on avait $\rho^{-1}(n) \notin \mathrm{Ass}\, M$, il existerait $s \notin \rho^{-1}(n)$ et $\in \bigcap_{m_i \in \mathrm{Ass} M} m_i$ donc $\rho(s) \notin n$ et pour tout $u \in M \otimes_A B$, $\exists p$ tel que $(\rho(s))^p u = 0$, ce qui est absurde. Inversement, si $m = \mathrm{Ann}\, x \in \mathrm{Ass}\, M$, comme $x \otimes 1 \neq 0$ dans $M \otimes_A B$, $\exists n \in \mathrm{Ass}_B(B(x \otimes 1)) \subset \mathrm{Ass}_B(M \otimes_A B)$ tel que $\rho(m) \subset n$ d'où $\rho^{-1}(n) = m$.

2. *Structure des modules artiniens*

Le but de ce paragraphe est de montrer que tous les modules artiniens sur un anneau commutatif peuvent être construits sur des anneaux noethériens semi-locaux complets, leur étude en détail dans ce cas est faite dans [12, 13].

Commençons par rappeler la notion de cogénérateur injectif dans une catégorie de modules. Quand ce n'est pas précisé, les modules sont à gauche.

Proposition 2.1. *Soit A un anneau unitaire et I un A-module. Désignons par H_I le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot, I)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Le foncteur H_I est exact et fidèle.*

(b) *I est injectif et pour tout idéal maximal m de A, $H_I(A/m) \neq 0$.*

On dira alors que I est un A-module fidèlement injectif. Bien évidemment (a) $\Rightarrow$ (b). Inversement si (b) a lieu soit M un A-module non nul et $x \neq 0$, $\in M$ alors $\exists m$ maximal dans A contenant $\mathrm{Ann}\, x$ et $f \neq 0$: $A/m \to I$ donc le composé $(x) = A/\mathrm{Ann}\, x \to A/m \to I$ n'est pas nul et se prolonge en un homomorphisme non nul de M dans I, ce qui établit la fidélité de H_I.

Si A est commutatif, I est un A-module fidèle: en effet si $a \in \operatorname{Ann} I$, $H_I(h_a) = 0$ où h_a est l'homothétie de rapport a dans A, donc $h_a = 0$ et $a = 0$ mais il y a des modules injectifs et fidèles non fidèlement injectifs par exemple le corps des fractions d'un anneau intègre.

DÉFINITION. Soit A un anneau, Ω l'ensemble des idéaux à gauche maximaux de A et E_m l'enveloppe injective du A-module A/m pour tout $m \in \Omega$. Alors $E = \prod_{m \in \Omega} E_m$ est un A-module fidèlement injectif que nous appellerons le A-module injectif essentiel associé à l'anneau A.

PROPOSITION 2.2. *Soit $\rho: A \to B$ un homomorphisme d'un anneau A dans un anneau B. Pour que B soit un A-module à droite plat, il faut que tout B-module injectif soit A-injectif et il suffit qu'il existe un B-module fidèlement injectif qui soit A-injectif.*

La condition est nécessaire. Soit un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow[f]{} & M & \xrightarrow{j} & N \\ & & \downarrow & & \\ & & E & & \end{array}$$

où M et N sont deux A-modules et E un B-module injectif, f un homomorphisme de A-modules de M dans E. Soit φ l'homomorphisme de B-modules $B \otimes_A M \to E$ défini par $\varphi(b \otimes x) = bf(x)$, $\forall x \in M$, $\forall b \in B$, alors φ se prolonge en un homomorphisme de $B \otimes_A N$ dans E puisque $1 \otimes j$: $B \otimes M \to B \otimes N$ est injectif par hypothèse d'où un homomorphisme $N \to B \otimes_A N \to E$ prolongent f.

La condition est suffisante. On suppose donc qu'il existe un B-module fidèlement injectif I qui soit A-injectif, soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A et $i: \mathfrak{a} \to A$ l'injection canonique, on a alors le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_B(B, I) & \xrightarrow{\operatorname{Hom}(i \otimes 1_B, 1_I)} & \operatorname{Hom}_B(\mathfrak{a} \otimes_A B, I) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Hom}_A(A, I) & \xrightarrow{\operatorname{Hom}(i, 1_I)} & \operatorname{Hom}_A(\mathfrak{a}, I). \end{array}$$

$\operatorname{Hom}(i, 1_I)$ est surjectif, les flèches verticales sont des isomorphismes donc $\operatorname{Hom}(i \otimes 1_B, 1_I)$ est surjectif et $i \otimes 1_B$ est injectif.

COROLLAIRE. *Soit A un anneau commutatif, S une partie multiplicative de A. Alors pour tout A-module M tel que l'application $M \to S^{-1}M$ soit* *injective, l'enveloppe injective E du $S^{-1}A$-module $S^{-1}M$ est en tant que A-module l'enveloppe injective de M.*

En effet, E est A-injectif et les morphismes $M \to S^{-1}M$ et $S^{-1}M \to E$ sont A-essentiels.

Nous aurons aussi besoin pour établir notre théorème de structure de la notion de topologie artinienne qui sera étudiée plus spécialement dans le chapitre suivant:

DÉFINITION. Etant donné un anneau A et un A-module M, on dira qu'une topologie linéaire sur M est artinienne s'il existe un système fondamental de voisinages de O formé de sous modules $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ tel que pour tout $\alpha \in I$, M/M_α soit un A-module artinien.

Lorsque de plus M est séparé et complet, on dira alors que M est strictement linéairement compact (en abrégé slc) conformément à [6, Chap. III, Sect. 2, Exercice 19].

Nous supposons désormais que A est un anneau commutatif, il est alors bien clair que si on se donne une topologie artinienne $\mathscr{C}$ sur A, tout idéal ouvert est de colongueur finie. Appelons alors E l'injectif essentiel associé à A et $\mathscr{C}E = \bigcup_{\mathscr{T}_\alpha \text{ouvert}} \operatorname{Ann}_E \mathscr{T}_\alpha$. Avec ces notations on a:

PROPOSITION 2.3. (1°) *Pour tout idéal ouvert $\mathscr{T}$ de A, $\operatorname{Ann}_E \mathscr{T}$ canoniquement isomorphe à $\operatorname{Hom}_A(A/\mathscr{T}, E)$ est de longueur finie (égale à celle de $A/\mathscr{T}$) et $A/\mathscr{T}$ fidèle.*

(2°) *Pour tout A-module de longueur finie M, l'application canonique $M \to \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(M, E), E)$ est bijective.*

(3°) *L'application $\varphi: \mathscr{T} \to \operatorname{Ann}_E \mathscr{T}$ est une bijection entre les idéaux ouverts de A et les sous modules de type fini de $\mathscr{C}E$ qui renverse l'inclusion.*

Remarquons d'abord que la fidélité de $\operatorname{Ann}_E \mathscr{T}$ sur $A/\mathscr{T}$ résulte du fait que $\operatorname{Ann}_E \mathscr{T}$ est $A/\mathscr{T}$ fidèlement injectif (ceci est d'ailleurs vrai pour tout idéal de A). Maintenant comme le foncteur $\operatorname{Hom}(\cdot, E)$ est exact, on peut se ramener par récurrence sur les longueurs à démontrer (1°) et (2°) quand long $A/\mathscr{T} =$ long $M = 1$. $\mathscr{T}$ est alors maximal soit $\mathscr{T} = m_0$ et soit $x = (x_m)_{m \in \Omega} \in E$ un élément de E tel que $m_0 x = 0$ (Ω spectre maximal de A). On a $m_0 x_m = 0$, $\forall m \in \Omega$ et si $m \neq m_0 \Rightarrow x_m \neq 0$ comme $x_m \in E_m$, $\exists s \in A$ tel que $s x_m \neq 0 \in A/m$, donc $m = \operatorname{Ann} s x_m \supset m_0$ ce qui est absurde, donc $x_m = 0$ pour $m \neq m_0$ et $\operatorname{Ann}_E m_0$ s'identifie à $\operatorname{Ann}_{E m_0} m_0$ qui est un A/m_0-espace vectoriel extension essentielle de A/m_0 donc nécessairement de dimension 1; $\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(A/m_0, E), E)$ est donc isomorphe à A/m_0. Ceci démontre (1°) et (2°).

(3°) Soit ψ l'application $M \subset \mathscr{C}E \to \operatorname{Ann}_A M$. Comme $\operatorname{Ann}_E \mathscr{T}$ est $A/\mathscr{T}$ fidèle $\psi_0\varphi$ est l'identité, étudions $\varphi_0\psi$: Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système de générateurs de M alors $\operatorname{Ann}_A M = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann} x_i$ et $\operatorname{Ann}_E(\operatorname{Ann}_A M) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Ann}_E(\operatorname{Ann} x_i)$ en raison de l'injection $A/\bigcap_{i=1} \operatorname{Ann} x_i \to \bigoplus_{i=1}^n A/\operatorname{Ann} x_i$ on peut donc supposer que M est engendré par un seul élément x. On a évidemment $\operatorname{Ann}_E(\operatorname{Ann}_A x) \supset (x)$, inversement soit $y \in \operatorname{Ann}_E(\operatorname{Ann}_A x)$ alors $\operatorname{Ann}_A y \supset \operatorname{Ann}_A x$ et soit $u: (x) \to E$ tel que $u(x) = y$, alors u se prolonge en v: $\operatorname{Ann}_E(\operatorname{Ann}_A x) \to E$ mais comme $\operatorname{Hom}(\operatorname{Ann}_E(\operatorname{Ann}_A x), E) = A/\operatorname{Ann} x$ d'après (2°), $\exists a \in A$ tel que $v(z) = az$, $\forall z \in \operatorname{Ann}_E(\operatorname{Ann}_A x)$ et donc $y = ax$. On peut améliorer (3°) quand A est séparé et complet:

Proposition 2.4. *Supposons A s.l.c. et n étant un entier posons pour tout sous A-module N de $(\mathscr{C}E)^n$, $N' = \{(a_i) \mid (a_i) \in A^n\ \forall (x_i) \in N, \sum a_i x_i = 0\}$. Alors*:

(i) $N = \varinjlim_\alpha \operatorname{Hom}_A(A^n/N' + \mathscr{T}_\alpha{}^n, E) = \operatorname{Hom}_A(A^n/N', \mathscr{C}E)$,

(ii) *L'injection canonique $A^n/N' \to \operatorname{Hom}_A(N, E)$ est un isomorphisme et l'application $N \to N'$ est une bijection de l'ensemble des sous A-modules de $(\mathscr{C}E)^n$ sur l'ensemble des sous modules fermés de A^n renversant l'inclusion (A^n est muni de la topologie produit).*

Posons $N_1 = \varinjlim_\alpha \operatorname{Hom}_A(A^n/N' + \mathscr{T}_\alpha{}^n, E) = \operatorname{Hom}_A(A^n/N', \mathscr{C}E)$. Il est clair que $N \subset N_1$ donc l'homomorphisme $\operatorname{Hom}_A(N_1, E) \to \operatorname{Hom}_A(N, E)$ est surjectif, or $\operatorname{Hom}_A(N_1, E) = \varprojlim \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(A^n/N' + \mathscr{T}_\alpha{}^n, E), E) = \varprojlim A^n/N' + \mathscr{T}_\alpha{}^n$ (Proposition 2.3, (2°)), d'autre part N' est évidemment fermé dans A^n donc A^n/N' est un A-module strictement linéairement compact [6, Chap. III, Sect. 2, Exemple 19(b)] et $A^n/N' = \varprojlim A^n/N' + \mathscr{T}_\alpha{}^n = \operatorname{Hom}_A(N_1, E)$ l'application $A^n/N' \to \operatorname{Hom}_A(N, E)$ qui était déjà injective est donc bijective et $N = N_1$ puisque E est fidèlement injectif.

L'application $N \to N'$ est injective d'après ce qui précède, montrons qu'elle est surjective. Soit U un sous module fermé de A^n, en posant $U' = \{(x_i) \mid (x_i) \in (\mathscr{C}E)^n, \forall (a_i) \in U \Rightarrow \sum a_i x_i = 0\}$ on a $(U')' \supset U$. Pour tout idéal $\mathscr{T}_\alpha$ ouvert dans A, $(U')' \subset ((U + \mathscr{T}_\alpha{}^n)')' = U_\alpha$ et d'après ce qui précède $A^n/U_\alpha = \operatorname{Hom}_A((U + \mathscr{T}_\alpha{}^n)', E) = A^n/U + \mathscr{T}_\alpha{}^n$ (Proposition 2.3 (2°)) donc $U_\alpha = U + \mathscr{T}_\alpha{}^n$ et $(U')' \subset \bigcap_\alpha (U + \mathscr{T}_\alpha{}^n) = U$ puisque U est fermé.

Abordons maintenant le théorème de structure.

Lemme. *Soit A un anneau* slc, *M un A-module de type fini de la forme A^n/U où U est un sous A-module fermé de A^n et que l'on munit de la topologie quotient. Alors tout sous module N de M de type fini est séparé et complet pour la topologie de A-module déduite de celle de A, cette topologie est la même que celle induite par le module M et N est un sous module fermé de M.*

Soit $N = \sum_{i=1}^{m} Ax_i$ et $\varphi: A^m \to N$ défini par $\varphi((a_i)) = \sum a_i x_i \cdot \varphi$ est continue quand on munit A^m de la topologie produit et N de la topologie $\mathscr{C}_1$ déduite de la topologie de A, cette topologie $\mathscr{C}_1$ est séparée car elle est plus fine que la topologie $\mathscr{C}_2$ induite par M donce ker φ est fermé et N muni de $\mathscr{C}_1$ est homéomorphe à $A^m/\ker\varphi$ [6, Chap. III, Sect. 2, Exemple 19] qui est slc, $\mathscr{C}_1$ est alors minimale et $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2$ et N est fermé dans M puisque complet pour $\mathscr{C}_2$.

THÉORÈME. *Soit A un anneau, M un A-module artinien. Alors il existe un anneau semi-local noethérien complet B, un homomorphisme $u: A \to B$ de telle sorte que M puisse être muni d'une structure de B module pour laquelle il est artinien et que la structure de A-module de $u_*(M)$ soit la structure donnée du A-module M.*

Quand N parcourt les sous modules de type fini de M, les $\mathrm{Ann}_A N$ forment une base de filtre d'idéaux de A et définissent donc une topologie artinienne sur A, soit $\hat{A}$ le séparé complété de A qui est donc slc. M peut-être muni d'une structure de $\hat{A}$-module de la façon suivante si $\sigma \in \hat{A}$ et $x \in M\sigma.\, x = sx$ où s est un relèvement de σ dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \hat{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/\mathrm{Ann}_A N & \longrightarrow & \hat{A}/\widehat{\mathrm{Ann}_A N} \end{array}$$

pour N sous module quelconque de type fini contenant x. Il y a alors identité entre sous A-modules et sous $\hat{A}$-modules de M, si bien que M est $\hat{A}$-artinien. M est extension essentielle de son socle et il se plonge dans un E^n où E est l'injectif essentiel associé à $\hat{A}$ et plus précisément dans $(\mathscr{C}E)^n$ où $\mathscr{C}$ désigne la topologie de $\hat{A}$. D'après la Proposition 2.4, il y a une bijection décroissante entre les sous modules M et les sous modules fermés de $\hat{A}^n/M'$ qui vérifient donc la condition de chaîne ascendante et comme d'après le lemme tout sous $\hat{A}$-module de type fini de $\hat{A}^n/M'$, est fermé, $\hat{A}^n/M'$ est un $\hat{A}$-module noethérien donc $\hat{A}/\mathrm{Ann}_{\hat{A}}(\hat{A}^n/M')$ est un anneau noethérien et comme $\mathrm{Ann}_{\hat{A}}(\hat{A}^n/M') \subset \mathrm{Ann}_{\hat{A}} M$ l'anneau $B = \hat{A}/\mathrm{Ann}_{\hat{A}} M$ est noethérien, slc puisque $\mathrm{Ann}_{\hat{A}} M$ est fermé, il a donc la forme voulue d'après [6, Chap. III, Sect. 3, Exemple 5]. L'homomorphisme u est le composé $A \to \hat{A} \to \hat{A}/\mathrm{Ann}_{\hat{A}} M$. On est ainsi ramené à chercher les modules artiniens sur un anneau semi local noethérien complet, on a alors le résultat suivant dû à Matlis [12].

PROPOSITION 2.5. *Soit A un anneau semi local noethérien complet de radical $\mathscr{R}$, alors l'enveloppe injective E du A-module $A/\mathscr{R}$ est un A-module artinien* *et tout A-module artinien est sous module d'un E^n. Il suffit de voir que $\mathscr{C}E = E$ en vertu de Proposition* 2.4 [12, *Lemme* 3.2].

Remarque. Si $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont les idéaux maximaux de A, $E = \bigoplus E_{m_i}$ est la décomposition antiprimaire réduite de E et $\mathscr{R}(E) = \bigoplus m_i E_{m_i}$. Pour que $E \neq \mathscr{R}(E)$, il faut et il suffit qu'il existe i tel que $E_{m_i} \neq m_i E_{m_i}$, or en vertu du corollaire de la Proposition 2.2, E_{m_i} s'identifie à l'enveloppe injective du corps résiduel k_i de l'anneau local A_{m_i} et comme en vertu de Proposition 2.4, $A_{m_i} = \mathrm{Hom}_{A_{m_i}}(E_{m_i}, E_{m_i})$; $\mathrm{Hom}_{A_{m_i}}(E_{m_i} \otimes k_i, E_{m_i}) = \mathrm{Hom}_{A_{m_i}}(k_i, A_{m_i})$ donc $E_{m_i} \neq m_i E_{m_i}$ est équivalent au fait que l'anneau local A_{m_i} est auto associé. [11, Définition 4.1].

II. Topologies artiniennes

Nous supposerons dans tout ce chapitre les anneaux commutatifs, unitaires bien sûr; nous avons donné au chapitre I, Section 2 la définition d'une topologie artinienne sur un anneau ou un module. Nous étudions dans un premier paragraphe le foncteur complétion associé à un anneau topologiquement artinien.

1. *Séparé complété d'un anneau topologiquement artinien*

Proposition 1.1. *Soit A un anneau topologiquement artinien, $\mathscr{C}$ sa topologie, E l'injectif essentiel associé à A (Chap.* I, *Sect.* 2) *et $\mathscr{C}E = \bigcup_{\mathscr{T}\text{ ouvert}} \mathrm{Ann}_E\, \mathscr{T}$. Alors:*

(i) *Le séparé complété $\hat{A}$ de A s'identifie à* $\mathrm{Hom}_A(\mathscr{C}E, E) = \mathrm{Hom}_A(\mathscr{C}E, \mathscr{C}E)$ *muni de la topologie de la convergence simple.*

(ii) *Soit $\mathscr{C}'$ une autre topologie artinienne sur A plus fine que $\mathscr{C}$, $\hat{A}'$, le séparé complété de A muni de $\mathscr{C}'$. Alors le prolongement continu $\hat{A}' \to \hat{A}$ de l'application identique de A est surjectif; pour qu'il soit bijectif, il faut et il suffit que $\mathscr{C} = \mathscr{C}'$.*

(i) Pour tout idéal ouvert $\mathscr{T}$ de A, l'application $A/\mathscr{T} \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(A/\mathscr{T}, E), E)$ est bijective (Chap. I, Proposition 2.3) donc $\hat{A} = \varprojlim A/\mathscr{T} = \mathrm{Hom}_A(\mathscr{C}E, E)$, la topologie de $\hat{A}$ s'identifiant à la topologie de la convergence simple sur $\mathrm{Hom}_A(\mathscr{C}E, E)$ puisque $\mathrm{Ann}_E\, \mathscr{T}$ est un module de type fini pour tout idéal ouvert $\mathscr{T}$.

(ii) On a $\mathscr{C}E \subset \mathscr{C}'E$ donc l'application $\hat{A}' = \mathrm{Hom}_A(\mathscr{C}'E, E) \to \mathrm{Hom}_A(\mathscr{C}E, E) = \hat{A}$ est surjective. D'autre part si elle est bijective alors $\mathscr{C}E = \mathscr{C}'E$ et si $\mathscr{T}$ est un idéal ouvert pour $\mathscr{C}'$, $\mathrm{Ann}_E\, \mathscr{T} \subset \mathscr{C}E$. Comme $\mathrm{Ann}_E\, \mathscr{T}$ est de type fini, il existe un idéal ouvert $\mathscr{J}$ pour $\mathscr{C}$ tel que $\mathrm{Ann}_E\, \mathscr{T} \subset \mathrm{Ann}_E\, \mathscr{J}$ donc $\mathscr{T} \supset \mathscr{J}$ (Chap. I, Proposition 2.3) et $\mathscr{C} = \mathscr{C}'$.

COROLLAIRE. *Soient A et B deux anneaux topologiquement artiniens, u un homomorphisme continu de A dans B. Si pour tout idéal $\mathscr{J}$ ouvert de B le composé $A \to B \to B/\mathscr{J}$ est surjectif, alors $\hat{u}: \hat{A} \to \hat{B}$ est surjectif.*

En effet, $\hat{B}$ s'identifie à $\varprojlim_{\mathscr{J}\,\text{ouvert dans}\,B} A/u^{-1}(\mathscr{J})$ et les $u^{-1}(\mathscr{J})$ définissent une topologie artinienne sur A moins fine que la topologie donnée.

PROPOSITION 1.2. *Avec les notations de la Proposition* 1.1 *soit $(m_i)_{i\in I}$ la famille des idéaux maximaux ouverts de A. Munissons, pour tout $i \in I$, A_{m_i} de la topologie de A-module déduite de celle de A et soit $\hat{A}_{m_i}$ le séparé complété de A_{m_i}. Alors:*

(i) *Pour tout $i \in I$, A_{m_i} est un anneau topologiquement artinien et $\hat{A}_{m_i}$ est un anneau* slc *local.*

(ii) *Si pour tout $i \in I$, f_i désigne le prolongement continu à $\hat{A}$ de l'application continue $A \to A_{m_i} \to \hat{A}_{m_i}$, l'application $\pi f_i: \hat{A} \to \prod_{i\in I} \hat{A}_{m_i}$ est un isomorphisme d'anneaux topologiques.*

(i) Pour tout idéal ouvert $\mathscr{T} \subset m_i$, $A_{m_i}/\mathscr{T} \cdot A_{m_i}$ est isomorphe à $(A/\mathscr{T})_{m_i}$, il est donc artinien, l'application canonique $A \to A_{m_i}$ étant évidemment continue. La topologie de $\hat{A}_{m_i}$ est définie par les $\widehat{\mathscr{T} \cdot A_{m_i}}$, or pour tout idéal ouvert $\mathscr{T}$ de A, $\exists n$ tel que $\mathscr{T} \cdot A_{m_i} \supset (m_i A_{m_i})^n$ ce qui implique $\widehat{\mathscr{T} \cdot A_{m_i}} \supset \widehat{(m_i A_{m_i})^n} \supset \left(\widehat{m_i A_{m_i}}\right)^n$ donc $\widehat{m_i \cdot A_{m_i}}$ est contenu dans le radical de $\hat{A}_{m_i}$ [6, Chap. III, Sect. 2, Lemme 3) et comme il est maximal il est égal à ce radical.

(ii) On a vu que $\hat{A} = \operatorname{Hom}_A(\mathscr{C}E, E)$. Rappelons que $E = \prod_{m\in\Omega} E_m$ où E_m est l'enveloppe injective de A/m. On sait que E_m est aussi la A_m-enveloppe injective de A_m/mA_m (Chap. II, Proposition 2.2, Corollaire). Si $\mathscr{C}_i$ désigne la topologie de A_{m_i} pour tout i, je dis que $\mathscr{C}E = \bigoplus_{i\in I} \mathscr{C}_i E_{m_i}$: d'abord il est clair que $\mathscr{C}_i E_{m_i} = \bigcup_\alpha \operatorname{Ann}_{E_{m_i}}(\mathscr{T}_\alpha \cap m_i)$; soit $\mathscr{T}_\alpha$ un idéal ouvert de A et $x = (x_m)_{m\in\Omega} \in \operatorname{Ann}_E \mathscr{T}_\alpha$. Si $\mathscr{T}_\alpha \not\subset m$ $\exists a \in \mathscr{T}_\alpha$, $\notin m$ tel que $ax_m = 0$, or E_m étant un A_m-module, a est inversible dans A_m et $x_m = 0$, si bien que les m pour lesquels $x_m \neq 0$ sont ceux qui contiennent $\mathscr{T}_\alpha$ et il n'y en a qu'un nombre fini puisque $A/\mathscr{T}_\alpha$ est artinien et ils sont évidemment ouverts ce qui prouve que $\mathscr{C}E \subset \bigoplus_{i\in I} \mathscr{C}_i E_{m_i}$, l'inclusion inverse est évidente. On en déduit que $\hat{A} = \operatorname{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} \mathscr{C}_i E_{m_i}, \prod_{m\in\Omega} E_m) = \prod_{m_i,m} \operatorname{Hom}_A(\mathscr{C}_i E_{m_i}, E_m)$ or pour $m_i = m$, $\operatorname{Hom}_A(\mathscr{C}_i E_{m_i}, E_{m_i}) = \operatorname{Hom}_{A_{m_i}}(\mathscr{C}_i E_{m_i}, E_{m_i}) = \hat{A}_{m_i}$ (Proposition 1.1). Si $m_i \neq m$ soit $f: \mathscr{C}_i E_{m_i} \to E_m$ et supposons qu'il existe $y \in E_m$ et $x \in \mathscr{C}_i E_{m_i}$ tels que $f(x) = y \neq 0$. On sait que l'idéal $\mathscr{T} = \operatorname{Ann}_A x$ est m_i-primaire [12, Lemme 3.2] c'est-à-dire $\exists p$ tel que $\mathscr{T} \supset m_i^p$ et $m_i^p y = 0$; or il existe $s \in A$ tel que $\operatorname{Ann}_A sy = m \supset m_i^p$ donc $m = m_i$ ce qui est absurde.

Ainsi $\hat{A} = \prod_{i \in I} \hat{A}_{m_i}$, la topologie de la convergence simple sur $\mathrm{Hom}_A(\mathscr{C}E, E)$ s'identifiant bien à la topologie produit de $\prod_{i \in I} \hat{A}_{m_i}$.

PROPOSITION 1.3. *Soit A un anneau topologiquement artinien, $\hat{A}$ son séparé complété; M, N, P trois A-modules de type fini. Alors:*

(i) *Si $M \to N \to P \to 0$ est une suite exacte d'applications linéaires, la suite $\hat{M} \to \hat{N} \to \hat{P} \to 0$ qu'on en déduit par passage aux séparés complétés (pour les topologies déduites de celles de A) est exacte.*

(ii) *Si i désigne l'application canonique $M \to \hat{M}$, on a pour tout idéal ouvert $\mathscr{T}_\alpha$ de A, $\widehat{\mathscr{T}_\alpha E} = \hat{\mathscr{T}}_\alpha \hat{E} = \hat{\mathscr{T}}_\alpha i(E)$ et $\hat{E} = \hat{A} i(E)$.*

(iii) *Si M est de présentation finie $\hat{M}$ est isomorphe à $M \otimes_A \hat{A}$.*

(i) En effet le foncteur $M \to \hat{M}$ est le composé des foncteurs $M \to \varprojlim \mathrm{Hom}(M/\mathscr{T}_\alpha M, E)$ et $\mathrm{Hom}(\cdot, E)$ en vertu de chapitre I, Section 2, Proposition 2.3 et ces foncteurs sont exacts à droite.

(ii) La démonstration se fait comme celle de [6, Chap. III, Sect. 2, Proposition 16], en utilisant (i) et le fait que toute application linéaire continue d'un module strictement linéairement compact dans un autre est un morphisme strict [6, Chap. III, Sect. 2, Exemple 19].

(iii) Evident si M est libre et comme il existe une suite exacte $A^m \to A^n \to M \to 0$ l'application de (i) donne le résultat.

PROPOSITION 1.4. *A étant toujours un anneau topologiquement artinien, soit $\mathscr{T}$ un idéal de type fini et $\mathscr{T}_{\alpha_0}$ un idéal ouvert de A. Alors*

(i) *Le séparé complété de $A/\mathscr{T}$ muni de la topologie quotient s'identifie à $\hat{A} \otimes_A A/\mathscr{T}$.*

(ii) *$1 + \mathscr{T}_{\alpha_0}$ est une partie multiplicative de A et le séparé complété de $(1 + \mathscr{T}_{\alpha_0})^{-1}A$ muni de la topologie de module déduite de celle de A s'identifie à $(1 + \hat{\mathscr{T}}_{\alpha_0})^{-1}\hat{A}$.*

(i) Evident d'après Proposition 1.3 (iii) puisque $A/\mathscr{T}$ est de présentation finie.

(ii) Les idéaux maximaux ouverts de $(1 + \mathscr{T}_{\alpha_0})^{-1}A$ correspondent dans A aux idéaux maximaux $m_1, m_2, \ldots, m_n$ qui contiennent $\mathscr{T}_{\alpha_0}$, les localisés de $(1 + \mathscr{T}_{\alpha_0})^{-1}A$ en ces idéaux maximaux s'identifiant aux A_{m_0} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ donc (Proposition 1.2) $\widehat{(1 + \mathscr{T}_{\alpha_0})^{-1}A} = \prod_{i=1}^n \widehat{A_{m_i}} = \prod_{i=1}^n \hat{A}_{\hat{m}_i}$. L'homomorphisme canonique surjectif $\hat{A} \to \prod_{i=1}^n \hat{A}_{\hat{m}_0}$ se factorise en $\hat{A} \to^v (1 + \hat{\mathscr{T}}_{\alpha_0})^{-1}\hat{A} \to^u \prod_{i=1}^n \hat{A}_{\hat{m}_i}$ puisque si $x \in 1 + \hat{\mathscr{T}}_{\alpha_0}$, $x \notin \hat{m}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, u est alors surjectif; montrons qu'il est injectif. Soit

$x/s \in \ker u$, $\exists t \in \bigcap_{i=1}^{n} \complement \hat{m}_i$ tel que $tx = 0$ et tout idéal ouvert contenant $\operatorname{Ann} x$ est étranger à chacun des $\hat{m}_i$ donc à $\hat{\mathscr{T}}_{\alpha_0}$ puisque $\hat{A}/\hat{\mathscr{T}}_{\alpha_0}$ est artinien, en particulier $(\operatorname{Ann} x + \hat{\mathscr{T}}_{\alpha_0}) \cap (1 + \hat{\mathscr{T}}_{\alpha_0}) \neq \varnothing$ donc $\operatorname{Ann} x \cap (1 + \hat{\mathscr{T}}_{\alpha_0}) \neq \varnothing$ et $x/s = 0$. Nous étudions maintenant la platitude du séparé complété $\hat{A}$ sur A.

DÉFINITION. Nous dirons qu'un anneau topologiquement artinien est $\widehat{\text{plat}}$ ("chapeau plat") si son séparé complété est un A-module plat.

Il résulte de Proposition 1.4 que si A est $\widehat{\text{plat}}$, pour tout idéal de type fini $\mathscr{T}$ et tout idéal ouvert $\mathscr{T}_{\alpha_0}$ de A, $A/\mathscr{T}$ et $(1 + \mathscr{T}_{\alpha_0})^{-1}A$ sont $\widehat{\text{plats}}$.

PROPOSITION 1.5. *Soit A un anneau noethérien et Φ une partie du spectre maximal de A. Munissons A de la topologie ayant pour système fondamental de voisinages de* 0 *les produits finis d'éléments de Φ, alors A est $\widehat{\textit{plat}}$.*

En effet, d'après Proposition 1.2, $\hat{A} = \prod_{m \in \Phi} \widehat{A_m}$ or $\widehat{A_m}$ est un A_m module plat puisque la topologie de A_m est la topologie mA_m-adique [6, Chap. III, Sect. 3, Theorem 3] donc un A-module plat et puisque A est cohérent, $\hat{A}$ est un A-module plat [6, Chap. I, Sect. 2, Exercice 12].

PROPOSITION 1.6. *Soit A un anneau topologiquement artinien cohérent. Pour que A soit $\widehat{\textit{plat}}$, il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite: sur tout idéal de type fini la topologie induite par l'anneau est la même que celle de A-module déduite de celle de A.*

La nécessité sera démontrée au chapitre III Section 2, Proposition 2.3. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de A, il faut montrer que l'application canonique $\hat{A} \otimes_A \mathfrak{a} \to \hat{A}$ est injective. Comme $\mathfrak{a}$ est de présentation finie, $\hat{A} \otimes_A \mathfrak{a} = \hat{\mathfrak{a}}$ d'après Proposition 1.3, $\mathfrak{a}$ étant muni de la topologie de A-module déduite de celle de A donc d'après la condition $\hat{\mathfrak{a}}$ s'injecte dans $\hat{A}$.

PROPOSITION 1.7. *Soit A un anneau topologiquement artinien $\widehat{\textit{plat}}$. Pour que le séparé complété $\hat{A}$ soit un A-module fidèlement plat il suffit que tout idéal maximal soit ouvert, cette condition est nécessaire s'il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux ouverts.*

Si Ω désigne le spectre maximal de A, $\hat{A} = \prod_{m \in \Omega} \hat{A}_m$, il faut vérifier que pour tout $\mu \in \Omega$, $\mu\hat{A} \neq \hat{A}$ or $\mu\hat{A}_\mu = \mu A_\mu \hat{A}_\mu \neq \hat{A}_\mu$ puisque l'adhérence de μA_μ dans $\hat{A}_\mu$ est l'idéal maximal de $\hat{A}_\mu$ (Proposition 1.2(i)) donc $\mu\hat{A} \neq \hat{A}$. Inversement supposons que l'ensemble $\mathcal{O}$ des idéaux maximaux ouverts est fini et que $\hat{A}$ est A-fidèlement plat. S'il existait $\mu \in \Omega - \mathcal{O}$, on aurait pour tout $m \in \mathcal{O}$ $\mu A_m = A_m$ et $\mu \hat{A}_m = \hat{A}_m$ donc $\mu \hat{A} = \hat{A}$ puisque $\hat{A} = \prod_{m \in \mathcal{O}} \hat{A}_m$ et que $\mathcal{O}$ est fini, ce qui est absurde.

Remarques. (1°) Si on ne suppose pas qu'il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux ouverts, la conditiln n'est nullement nécessaire, contrairement à ce qui était annoncé dans [3, Proposition 5]. Prenons en effet un produit infini $A = \prod_{i \in I} A_i$ d'anneaux slc locaux muni de la topologie produit alors $\hat{A} = A$ donc $\hat{A}$ est A fidèlement plat et il y a des idéaux maximaux non ouverts; par exemple ceux qui contiennent $\bigoplus A_i$.

(2°) Si on prend dans l'énoncé de la Proposition 1.5, $\Phi = \Omega$ on obtient alors un séparé complété $\hat{A}$ fidèlement plat sur A, donc la flèche $A \to \hat{A}$ est injective, on retrouve donc le fait que A est séparé [6, Chap. III, Sect. 3, Exemple 7]. Cette topologie est d'ailleurs la topologie artinienne la plus fine que l'on puisse définir sur A et on peut se demander pour quelles topologies artiniennes A va-t-il rester chapeau plat. La réponse est donnée par la

PROPOSITION 1.8. *Soit A un anneau muni de deux topologies artiniennes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_0$. On suppose que $\mathscr{C}_0$ est plus fine que $\mathscr{C}$ et on désigne toujours par E l'injectif essentiel associé à A. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *$\widehat{A}$ est plat pour $\mathscr{C}$.*

(ii) *Pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A, on a $(\mathscr{C}E : \mathfrak{a})_{\mathscr{C}_0 E} = \mathrm{Ann}_{\mathscr{C}_0 E}\, \mathfrak{a} + \mathscr{C}E$ où $(\mathscr{C}E : \mathfrak{a})_{\mathscr{C}_0 E} = \{x;\ x \in \mathscr{C}_0 E \text{ et } \mathfrak{a}x \subset \mathscr{C}E\}$.*

(iii) *Pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A et tout couple $(\mathscr{T}_\alpha, \mathscr{T}_\alpha^0)$ formé d'un idéal ouvert pour $\mathscr{C}$ et d'un idéal ouvert pour $\mathscr{C}_0$, il existe un autre couple $(\mathscr{T}_\beta, \mathscr{T}_\beta^0)$ tel que $\mathfrak{a}\mathscr{T}_\alpha + \mathscr{T}_\alpha^0 \supset \mathscr{T}_\beta \cap (\mathfrak{a} + \mathscr{T}_\beta^0)$.*

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): (ii) revient à dire que pour tout couple $(\mathscr{T}_\alpha, \mathscr{T}_\alpha^0)$, il existe un couple $(\mathscr{T}_\beta, \mathscr{T}_\beta^0)$ tel que $\mathrm{Ann}_E(\mathfrak{a}\mathscr{T}_\alpha + \mathscr{T}_\alpha^0) \subset \mathrm{Ann}_E(\mathfrak{a} + \mathscr{T}_\beta^0) + \mathrm{Ann}_E(\mathscr{T}_\beta) = \mathrm{Ann}_E((\mathfrak{a} + \mathscr{T}_\beta^0) \cap \mathscr{T}_\beta)$ soit $\mathfrak{a}\mathscr{T}_\alpha + \mathscr{T}_\alpha^0 \supset (\mathfrak{a} + \mathscr{T}_\beta^0) \cap \mathscr{T}_\beta$ (Chap. I, Proposition 2.3, (3°)).

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Notant $\hat{A}_0$ (resp. $\hat{A}$) le séparé complété de A muni de $\mathscr{C}_0$ (resp. $\mathscr{C}$) on sait (Proposition 1.1(i)) que $\hat{A}_0 = \mathrm{Hom}_A(\mathscr{C}_0 E, E)$ et $\hat{A} = \mathrm{Hom}_A(\mathscr{C}E, E)$; on peut donc écrire la suite exacte de A-modules $0 \to \mathrm{Hom}_A(\mathscr{C}_0 E/\mathscr{C}E, E) \to \hat{A}_0 \to \hat{A} \to 0$ et il résulte de [6, Chap. I, Sect. 2, n° 5, Proposition 4] que $\hat{A}$ est A-plat si et seulement si pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de type fini de A la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(\mathscr{C}_0 E/\mathscr{C}E, E) \otimes_A A/\mathfrak{a} \to \hat{A}_0 \otimes_A A/\mathfrak{a} \to \hat{A} \otimes_A A/\mathfrak{a} \to 0$$

est exacte, c'est-à-dire si et seulement si l'homomorphisme $\mathrm{Hom}_A(\mathscr{C}_0 E/\mathscr{C}E, E) \otimes_A A/\mathfrak{a} \to \mathrm{Hom}(\mathscr{C}_0 E, E) \otimes_A A/\mathfrak{a}$ est injectif; or pour tout A-module M,

$\mathrm{Hom}_A(M, E) \otimes_A A/\mathfrak{a} = \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}M), E)$ puisque $A/\mathfrak{a}$ est de présentation finie; comme E est fidèlement injectif il revient donc au même de dire que l'homomorphisme $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, \mathscr{C}_0E) \to \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, \mathscr{C}_0E/\mathscr{C}E)$ est surjectif. Or ceci est précisément ce qu'exprime la relation de (ii).

COROLLAIRE. *Pour qu'un anneau noethérien A soit plat pour une topologie artinienne $\mathscr{C}$, il faut et il suffit que $\mathscr{C}$ soit identique à l'une des topologies décrites dans la Proposition* 1.5.

La condition suffisante a été vue dans Proposition 1.5, inversement si A est plat, il suffit de montrer que le produit de deux idéaux ouverts $\mathscr{T}_\alpha$ et $\mathscr{T}_\alpha'$ pour $\mathscr{C}$ est ouvert or ceci résulte du (iii) de la proposition appliquée à $\mathfrak{a} = \mathscr{T}_\alpha'$, $\mathscr{T}_\alpha^0 = \mathscr{T}_\alpha \mathscr{T}_\alpha'$.

En particulier si A est un anneau local d'idéal maximal m, la topologie m-adique est la seule topologie artinienne pour laquelle A est plat.

2. *Structure des anneaux strictement linéairement compacts*

On se propose dans ce paragraphe de donner la structure des anneaux slc, i.e., topologiquement artiniens séparés et complets. La proposition suivante permet de se ramener au cas local.

PROPOSITION 2.1. *Soit A un anneau* slc, *$(m_i)_{i \in I}$ l'ensemble de ses idéaux maximaux ouverts. Alors l'application $A \to \prod_{i \in I} A_{m_i}$ est un isomorphisme.*

C'est une conséquence immédiate de Proposition 1.2(ii).

Nous étudions maintenant un exemple fondamental d'anneau local slc. Soit (A, m) un anneau local noethérien et complet pour la topologie m-adique et $B = A[[X_i]]_{i \in I}$ un anneau de séries formelles sur A (I ensemble quelconque) c'est-à-dire l'algèbre large de $N^{(I)}$ par rapport à A [5, Chap. II, Sect. 7, n° 10]. En tant que A-module, B s'identifie à $A^{N^{(I)}}$ qui est donc séparé et complet pour la topologie produit. Nous allons montrer que cette topologie produit est une topologie linéaire et artinienne sur l'anneau B ce qui prouvera que B est slc. Pour tout $\lambda = (\lambda_i) \in N^{(I)}$ posons $|\lambda| = \sum \lambda_i$ et pour tout entier n et tout sous ensemble fini J de I posons $J_n = \{\lambda = (\lambda_i) \in N^{(I)};\ \lambda_i = 0$ pour $i \notin J$ et $|\lambda| \leqslant n\}$ et $\mathfrak{a}_{J_n} = \{s = \sum a_\lambda X^\lambda;\ a_\lambda \in m^{n-|\lambda|}$ pour tout $\lambda \in J_n\}$. Comme J_n est un ensemble fini $\mathfrak{a}_{J_n}$ est ouvert dans B. Inversement soit V un ouvert de B; alors il existe une partie finie H de $N^{(I)}$ et un entier p tels que $(s = \sum a_\lambda X^\lambda,\ a_\lambda \in m^p$ pour $\lambda \in H) \Rightarrow s \in V$. Soit $\nu = p + \sup_{\lambda \in H} |\lambda|$ et $J = \{i \in I \mid \exists \lambda \in H$ tel que $pr_i\lambda \neq 0\}$; $J \subset I$ est fini et si $s = \sum a_\lambda X^\lambda \in \mathfrak{a}_{J_\nu}$, on a, pour $\lambda \in H \subset J_\nu$, $a_\lambda \in m^{p+\sup_{\lambda \in H}|\lambda| - \lambda} \subset m^p$ donc $s \in V$ et $V \supset \mathfrak{a}_{J_\nu}$. D'autre part les $\mathfrak{a}_{J_n}$ sont des idéaux de B (il suffit de remarquer que $\lambda + \mu \in J_n \Rightarrow \lambda$ et $\mu \in J_n$) et si J et K sont deux sous ensembles finis de I, n et n' deux entiers $\mathfrak{a}_{J_n} \cap \mathfrak{a}_{K_{n'}} \supset \mathfrak{a}_{(J\cup K)\sup(n,n')}$ ce qui prouve que les $\mathfrak{a}_{J_n}$ définissent sur B une topologie linéaire identique à la topologie produit. Reste à montrer que $\forall J$ fini $\subset I$, $\forall n$, $B/\mathfrak{a}_{J_n}$ est un anneau artinien; posons $B_J = A[[X_\alpha]]_{\alpha\in J}$ et soit m_J l'unique idéal maximal de l'anneau local noethérien B_J ; il résulte de [6, bas de la p. 33] que $B_J \cap \mathfrak{a}_{J_n} = m_J{}^n$ d'où une injection $\varphi: B_J/m_J{}^n \to B/\mathfrak{a}_{J_n}$, d'autre part si $s = \sum a_\lambda X^\lambda$ soit $s' = \sum a_\lambda' X^\lambda$ où $a_\lambda' = a_\lambda$ pour $\lambda \in J_n$ et $a_\lambda' = 0$ pour $\lambda \notin J_n$ alors $s' \in B_J$ et $s - s' \in \mathfrak{a}_{J_n}$ donc φ est bijective. Comme en fait c'est un polynome l'anneau $A[X_\alpha]_{\alpha\in I}$ est partout dense dans B. On peut finalement énoncer:

Proposition 2.2. *Soit A un anneau local noethérien complet, $B = A[[X_\alpha]]_{\alpha\in I}$ un anneau de séries formelles sur A. Alors la topologie produit du A-module B est une topologie linéaire et artinienne sur l'anneau B pour laquelle il est* slc *et l'anneau de polynomes $A[X_\alpha]_{\alpha\in I}$ est partout dense dans B.*

Nous allons montrer qu'en fait tout anneau local slc est isomorphe à un quotient d'un anneau de ce type.

Lemme. *Soit W un anneau qui est un corps ou un anneau de valuation discrète complet et M un W-module* slc. *On suppose que tout sous module ouvert de M est de colongueur finie (c'est toujours vrai si W est un corps). Alors il existe un ensemble d'indices I tel que M soit isomorphe à un quotient de W^I (muni de la topologie produit) par un sous module fermé.*

Si W est un corps, M est un W^I d'après [6, Chap. III, Exemple 20(d)] et il n'y a rien à démontrer.

Supposons donc que W est un anneau de valuation discrète complet, soient π une uniformisante de W et K le corps des fractions. Désignons par Λ_0 le W-module K/W qui est l'enveloppe injective du W module $W/\pi W$. Pour tout sous module M_α ouvert dans M, on a $M/M_\alpha = \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(M/M_\alpha, \Lambda_0), \Lambda_0)$ d'après (Chap. I, Proposition 2.3) donc en posant $M' = \varinjlim_\alpha \operatorname{Hom}(M/M_\alpha, \Lambda_0)$, M s'identifie à $\operatorname{Hom}_A(M', \Lambda_0)$ muni de la topologie de la convergence simple (Λ_0 étant muni de la topologie discrète). Soit E un injectif contenant M', on a un homomorphisme surjectif continu (pour les topologies de la convergence simple) u: $\operatorname{Hom}_W(E, \Lambda_0) \to \operatorname{Hom}_W(M', \Lambda_0)$. D'autre part il existe deux ensembles d'indices I et J tels que $E = (\bigoplus_{i\in I} \Lambda_i) \oplus (\bigoplus_{j\in J} K_j)$ où $K_i \simeq K$ et $\Lambda_j \simeq \Lambda_0$ $\forall i \in I$ et $\forall j \in J$ [5, Chap. VII, Sect. 2, Exemple 3] donc $\operatorname{Hom}_W(E, \Lambda_0) = \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_W(\Lambda_i, \Lambda_0) \times \prod_{j\in J} \operatorname{Hom}_W(K_j, \Lambda_0) = W^I \times K^J$ (muni de la topologie produit, W et K étant munis de la topologie π adique, pour K topologie π-adique veut dire que K_α est un sous module ouvert $\Leftrightarrow$ il contient un $A\pi^n$ pour un $n \in \mathbb{Z}$). Maintenant si M_α est un sous module ouvert de $\operatorname{Hom}_W(M', \Lambda_0) = M$, $u^{-1}(M_\alpha)$ étant ouvert et de colongueur finie dans $W^I \times K^I$ je dis que $u^{-1}(M_\alpha) \supset K^J$.

En effet l'isomorphisme $K^J/u^{-1}(M_\alpha) \cap K^J \simeq K^J + u^{-1}(M_\alpha)/u^{-1}(M_\alpha)$ montre que $u^{-1}(M_\alpha) \cap K^J = N$ est un sous module de colongueur finie de K^J et supposons $\exists x = (x_j)_{j\in J} \in K^J$ et $\notin N$; $\exists$ une famille d'entiers $(n_j)_{j\in J}$ et une famille d'éléments de $W(a_j)_{j\in J}$, $a_j \notin W\pi$ telles que $\forall j$, $x_j = a_j\pi^{n_j}$. Posons, pour tout $p \geqslant 0$, $x_p = (a_j\pi^{n_j-p})$, la suite de sous modules $N_p = N + Wx_p/N$ est alors strictement croissante dans K^J/N ce qui est absurde donc $N = K^J$. Comme M est séparé $\ker u = \bigcap_\alpha u^{-1}(M_\alpha) \supset K^J$ ce qui prouve que si τ est l'injection canonique continue $W^I \to W^I \times K^J$, $u \circ \tau$ est surjectif. CQFD.

THÉORÈME. *Soit (A, m) un anneau local* slc *de corps résiduel k. Alors il existe un anneau local noethérien complet (W, μ) et un ensemble d'indices K tels que A soit isomorphe à un quotient par un idéal fermé de l'anneau de séries formelles $W[[X_\alpha]]_{\alpha\in K}$ muni de la topologie produit décrite dans la Proposition* 2.2. *Si A contient un corps, on peut prendre $W = k$, sinon on peut prendre pour W un anneau de Cohen* [10, *Chap.* 0, *Définition* 19.8.4] *de corps résiduel k.*

D'après [10, Chap. 0, Proposition 19.8.6(ii)] il existe un anneau de Cohen (W, μ) dont le corps résiduel est isomorphe à k et il en résulte tout d'abord que les homomorphismes canoniques $Z \to A$ et $Z \to W$ se factorisent à travers le même anneau local premier $P \to A$ et $P \to W$ ces homomorphismes étant continus (W étant muni de la topologie μ-adique). Considérons sur A la topologie $\mathscr{C}_m$ définie par les $\overline{m^n}$ ($n \geqslant 0$) (adhérence de m^n). Cette topologie est plus fine que la topologie donnée sur A et il résulte de [7, Chap. III, Sect. 3, Corollary 1, Proposition 9] que A est complet pour $\mathscr{C}_m$ et comme $\mathscr{C}_m$ est métrisable la Proposition 19.3.10 de [10, Chap. 0] montre qu'il existe un homomorphisme local continu u_0: $W \to A$ puisque W est une P-algèbre formellement lisse et que l'homomorphisme $P \to A$ reste continu quand on munit A de $\mathscr{C}_m$; u_0 reste continu quand on munit A de sa topologie donnée. Si A contient un corps, le raisonnement précédent et [10, Chap. 0, Proposition 19.6.2] montrent qu'on peut prendre $W = k$. Si maintenant $\mathscr{T}_\lambda$ est un idéal ouvert de A, $A/\mathscr{T}_\lambda$ étant un anneau artinien est isomorphe à un quotient d'un anneau de la forme $W[X_\alpha]_{\alpha\in J}/m_J{}^n$, J ensemble fini, m_J idéal maximal des polynomes dont le coefficient constant $\in \mu$, ce qui prouve que $A/\mathscr{T}_\lambda$ et à fortiori $m/\mathscr{T}_\lambda$ est un W-module de longueur finie et m muni de la topologie induite par celle de A est un W module slc vérifiant les hypothèses du lemme. Il existe donc un ensemble d'indices I et un homomorphisme continu surjectif u_1 de W-modules $W^I \to m$. On en déduit l'existence d'une famille $(x_\alpha)_{\alpha\in K}$ d'éléments de m telle que pour tout idéal $\mathscr{T}_\lambda$ ouvert il n'y ait qu'un nombre fini de x_α qui n'appartiennent pas à $\mathscr{T}_\lambda$, ces x_α engendrant le W-module et à fortiori le A-module $m/\mathscr{T}_\lambda$. Il suffit en effet si W est un corps de prendre les images par u_1 de la base canonique de $W^{(I)}$ et si W est un anneau de valuation discrète de prendre les images par u_1 des éléments $(\xi_{i,n})_{i\in I, n\in N}$ où $pr_j(\xi_{i,n}) = 0$ si $i \neq j$ et $pr_i(\xi_{i,n}) = \pi^n$ (π uniformisante de W). Définissons alors u: $W[X_\alpha]_{\alpha\in K} \to A$ par $u = u_0$ sur W et $u(X_\alpha) = x_\alpha$ $\forall\alpha \in K$. La propriété de la famille $(x_\alpha)_{\alpha\in K}$ implique que u est continu quand on munit l'anneau de polynomes $W[X_\alpha]_{\alpha\in K}$ de la topologie induite par la topologie produit de $W[[X_\alpha]]_{\alpha\in K}$. Comme A est complet, u se prolonge en un homomorphisme continu $\hat{u}$: $W[[X_\alpha]]_{\alpha\in K} \to A$ qui est surjectif car pour tout idéal ouvert $\mathscr{T}_\lambda$ de A, le composé $W[[X_\alpha]]_{\alpha\in K} \to A \to A/\mathscr{T}_\lambda$ est surjectif (Proposition 1.1 corollaire).

Nous allons donner maintenant diverses conditions pour qu'un anneau local slc soit noethérien.

PROPOSITION 2.3. *Soit (A, m) un anneau local* slc *de corps résiduel k. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *A est noethérien et complet pour la topologie m-adique.*

(b) *$rg_k m/m^2$ est fini.*

(c) *$\mathscr{C}E$ est injectif ($\mathscr{C}$ topologie de A, E enveloppe injective de A/m).*

(d) *$\mathscr{C}E$ est artinien.*

Visiblement (a) $\Rightarrow$ (b), l'équivalence de (a) et (d) résulte de (Chap. I, Proposition 2.4). (a) $\Rightarrow$ (c) puisque $\mathscr{C}E = E$ [12, Lemme 3.2]. Montrons

(b) $\Rightarrow$ (a): si (b) a lieu A/m^n est un anneau artinien $\forall n$ et en reprenant la démonstration du théorème ci-dessus, on voit qu'on peut prendre comme famille $(x_\alpha)_{\alpha\in K}$ un système de générateurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ de m (mod m^2); on a donc un homomorphisme surjectif $W[[X_1, X_2, \dots, X_n]] \to A$ prouvant que A est noethérien.

(c) $\Rightarrow$ (b): Pour tout idéal $\mathscr{T}$ de A on a une injection $A/\mathscr{T} \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(A/\mathscr{T}, E), E)$ donc si $\mathscr{C}E = E$, $\mathscr{T}$ est fermé et tout idéal de colongueur finie est ouvert. L'espace vectoriel m/m^2 sur k est slc c'est donc un k^I [6, Chap. III, Sect. 2, Exercice 20] dans lequel tout sous espace est fermé et en particulier $k^{(I)}$, mais $k^{(I)}$ est partout dense dans k^I donc $k^{(I)} = k^I$ et I est fini.

III. TOPOLOGIES LINÉAIRES SUR UN ANNEAU COHÉRENT

Nous allons étudier dans ce chapitre les topologies linéaires sur un anneau pour lesquelles le lemme d'Artin Rees relatif aux topologies adiques sur un anneau noethérien est vrai. Les anneaux et les modules sont unitaires, quand ce n'est pas précisé, les modules sont à gauches.

1. *Topologies d'Artin Rees*

Soit A un anneau muni d'une topologie linéaire à gauche $\mathscr{C}$ [8, Chap. V, Sect. 2], P. Gabriel a montré qu'il revenait au même de se donner une sous catégorie fermée $\mathbf{C}$ de Mod A_S [8, Chap. V, Proposition 3, Lemme 1]: $M \in \mathbf{C} \Leftrightarrow \forall x \in M$, $\operatorname{Ann}_A x$ est ouvert pour $\mathscr{C}$. On peut alors définir sur tout A-module à gauche M une topologie $T_{\mathbf{C}}(M)$: N sous module de M est ouvert pour $T_{\mathbf{C}}(M) \Leftrightarrow M/N \in \mathbf{C}$. Si M est de type fini, $T_{\mathbf{C}}(M)$ a comme système fondamental de voisinages de 0 les $\mathscr{T}M$ pour $\mathscr{T}$ idéal ouvert dans A. Considérons l'assertion

(R) Pour tout A-module M et tout sous module N de M, la topologie $T_{\mathbf{C}}(N)$ est égale à la topologie induite sur N par $T_{\mathbf{C}}(M)$. $T_{\mathbf{C}}(N)$ est toujours plus fine que la topologie induite et Gabriel a démontré [8, Chap. V, Proposition 1.1]:

PROPOSITION 1.1 (Gabriel). *Avec les notations ci-dessus, on a équivalence entre*

(a) (R) *est vraie.*

(b) *L'enveloppe injective d'un objet de* $\mathbf{C}$ *est un objet de* $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ *est stable par enveloppes injectives*).

Commençons par donner quelques compléments à ce résultat.

LEMME DE DENSITÉ. *Soit A un anneau, E un A-module fidèlement injectif, A' l'anneau* $\operatorname{Hom}_A(E, E)$ *et E' un sous $A - A'$ bimodule de E. Alors pour tout A-module M, l'image canonique de M dans* $\operatorname{Hom}_{A'}(\operatorname{Hom}_A(M, E'), E)$ *est partout dense dans* $\operatorname{Hom}_{A'}(\operatorname{Hom}_A(M, E'), E)$ *muni de la topologie de la convergence simple (E étant muni de la topologie discrète). Si M est un sous module d'un E'^m, l'homomorphisme* $M \to \operatorname{Hom}_{A'}(\operatorname{Hom}_A(M, E'), E)$ *est surjectif; il est bijectif si* $\operatorname{Hom}_A(M, E') = \operatorname{Hom}_A(M, E)$.

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \operatorname{Hom}_A(M, E')$ et $\varphi \in \operatorname{Hom}_{A'}(\operatorname{Hom}_A(M, E'), E)$, il faut montrer qu'il existe $x \in M$ tel que $\varphi(u_i) = u_i(x)$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Montrons d'abord que c'est vrai si $n = 1$: soit N l'idéal de A' des endomorphismes de E qui s'annulent sur $u_1(M)$, comme E est A-fidèlement injectif $u_1(M) = \{x,\ x \in E$ et $\operatorname{Ann}_{A'} x \supset N\}$ or pour tout $s \in N$ $s\varphi(u_1) = \varphi(su_1) = 0$ donc $\varphi(u_1) \in u_1(M)$. Remplaçons alors E par E^n et E' par E'^n et soit θ: $\operatorname{Hom}_A(M, E'^n) \to E^n$ défini par $\theta(v) = (\varphi(v_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ pour tout $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \operatorname{Hom}_A(M, E'^n)$, θ est un homomorphisme de $\operatorname{Hom}_A(E^n, E^n)$ modules, E^n est évidemment fidèlement injectif donc d'après ce qui précède $\exists x \in M$ tel que $\theta(u) = u(x)$ où $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ c'est-à-dire $\varphi(u_i) = u_i(x)$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Supposons maintenant qu'il existe une injection $j: M \to E'^m$. Soient $s_1', s_2', \dots, s_m'$ les projections de E'^m sur E' et posons $s_i' \circ j = \sigma_i'$. Comme E est A-injectif et que E' est un sous A'-module de E, tout A-homomorphisme $u: M \to E'$ est de la forme $\sum_{i=1}^m a_i \sigma_i'$ où $a_i \in A'$ $\forall i$. Soit alors $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(M, E'), E)$, il existe d'après le lemme de densité $x \in M$ tel que $\varphi(\sigma_i') = \sigma_i'(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$ et alors $\varphi(u) = \varphi(\sum a_i \sigma_i') = \sum a_i \varphi(\sigma_i') = \sum a_i \sigma_i'(x) = u(x)$.

Enfin si $\mathrm{Hom}_A(M, E') = \mathrm{Hom}_A(M, E)$, l'injectivité de l'homomorphisme $M \to \mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(M, E), E)$ résulte du fait que E est A fidèlement injectif.

PROPOSITION 1.2. *Avec les notations de Proposition* 1.1, *si l'assertion* (R) *est vraie, pour toute suite exacte de modules de type fini* $O \to M \to^u N \to^v P \to O$, *la suite* $O \to M \to^{\hat{u}} \hat{N} \to^{\hat{v}} \hat{P}$ *qu'on en déduit par passage aux séparés complétés est exacte*; *de plus* $\hat{u}$ *est un morphisme strict et* $\hat{v}(\hat{N})$ *est partout dense dans* $\hat{P}$.

Soit E le A-module fidèlement injectif produit des enveloppes injectives des $A^{(N)}/F$ pour F parcourant l'ensemble des sous modules de $A^{(N)}$ et $E' = \varinjlim_{\mathscr{T}\text{ouvert}} \mathrm{Hom}_A(A/\mathscr{T}, E)$, E' est un sous $A - A'$ bimodule de $E(A' = \mathrm{Hom}_A(E, E))$. Pour tout idéal ouvert $\mathscr{T}$, $M/\mathscr{T}M$ s'injecte dans E' et comme $\mathrm{Hom}_A(M/\mathscr{T}M, E) = \mathrm{Hom}_A(M/\mathscr{T}M, E')$ le Lemme de Densité montre que $M/\mathscr{T}M = \mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(M/\mathscr{T}M, E'), E)$ et donc

$$\hat{M} = \mathrm{Hom}_{A'}(\varinjlim \mathrm{Hom}_A(M/\mathscr{T}M, E'), E) = \mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(M, E'), E)$$

puisque M est de type fini; la topologie de $\hat{M}$ s'identifiant à la topologie de la convergence simple. Si (R) est vraie, E' est A injectif (Proposition 1.1) et on a les suites exactes:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P, E') \to \mathrm{Hom}_A(N, E') \to \mathrm{Hom}_A(M, E') \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(M, E'), E) \xrightarrow{\hat{u}} \mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(N, E'), E) \xrightarrow{\hat{v}} \mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(P, E'), E).$$

$\hat{u}$ est un morphisme strict. Soient $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathrm{Hom}_A(M, E')$ et Ω le sous A module ouvert de $\mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(M, E'), E)$ des φ tels que $\varphi(u_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ et $v_1, v_2, \dots, v_n$ des prolongements de $u_1, u_2, \dots, u_n$ à N alors si Ω' est l'ouvert de $\mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(N, E'), E)$ des ψ tels que $\psi(v_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ on a $\hat{u}(\Omega) = \Omega' \cap \mathrm{Im}\, \hat{u}$.

$\mathrm{Im}\, \hat{v}$ *est partout dense dans* $\mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(P, E'), E)$. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(P, E'), E)$ et $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathrm{Hom}_A(P, E')$. Par le lemme de densité $\exists x \in P$ tel que $\varphi(u_i) = u_i(x)$ $\forall i$. Soit $y \in N$ tel que $v(y) = x$ et

θ: $\mathrm{Hom}_A(N, E') \to E$ défini par $\theta(u) = u(y)$ alors $(\varphi - \hat{v}(\theta))(u_i) = \varphi(u_i) - \theta(u_i \circ v) = u_i(x) - u_i \circ v(y) = 0$.

Dans le cas noethérien commutatif, on peut caractériser assez facilement les sous catégories fermées de Mod A qui vérifient (R):

PROPOSITION 1.3. *Soit A un anneau commutatif noethérien,* $\mathbf{C}$ *une sous catégorie fermée de* Mod A. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1°) $\mathbf{C}$ *vérifie les conditions équivalentes de la Proposition* 1.1.

(2°) *Il existe une partie Φ de* Spec A, *stable par spécialisation, telle que* $\mathbf{C}$ *soit la catégorie des M tels que* Supp $M \subset \Phi$; *en particulier si Φ est une partie fermée $V(\mathfrak{a})$, la topologie $T_{\mathbf{C}}(A)$ est la topologie $\mathfrak{a}$-adique.*

(1°) $\Rightarrow$ (2°): Pour tout idéal premier p de A, désignons par E_p l'enveloppe injective de A/p; on sait que tout A-module injectif E est somme directe de modules E_p [12, Théorème 2.5]. Soit Φ la partie de Spec A constituée par les p tels que $E_p \in \mathbf{C}$. Φ est stable par spécialisation: si $p \in \Phi$ et $q \supset p$, A/q est un quotient de A/p donc $\in \mathbf{C}$ et $E_q \in \mathbf{C}$ (Proposition 1.1). Maintenant il est clair que $M \in \mathbf{C} \Leftrightarrow E(M) \in \mathbf{C}$ où $E(M)$ est l'enveloppe injective de M et comme $E(M) = \bigoplus_{p \in \mathrm{Ass}\, M} E_p^{(\mu(p))}$ où les $\mu(p)$ sont des cardinaux convenables non nuls, $M \in \mathbf{C} \Leftrightarrow \mathrm{Ass}\, M \subset \Phi \Leftrightarrow \mathrm{Supp}\, M \subset \Phi$ [5, Chap. IV, Sect. 1 n° 3, Proposition 7].

(2°) $\Rightarrow$ (1°): Montrons d'abord que $\mathbf{C}$ est fermée: il est clair que tout sous module et tout quotient d'un module de $\mathbf{C}$ est dans $\mathbf{C}$; si maintenant M est un A-module quelconque, soit M_0 la somme des sous modules $(N_i)_{i \in I}$ tels que $\mathrm{Supp}\, N_i \subset \Phi$ $\forall i$, alors $\mathrm{Supp}\, M_0 = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Supp}\, N_i \subset \Phi$ et M_0 est le sous module maximum de M qui appartient à $\mathbf{C}$. Si $M \in \mathbf{C}$, en vertu de l'égalité $E(M) = \bigoplus_{p \in \mathrm{Ass}\, M} E_p^{(\mu(p))}$, $\mathrm{Ass}\, E(M) = \bigcup_{p \in \mathrm{Ass}\, M} \mathrm{Ass}\, E_p$ or $\mathrm{Ass}\, E_p = \{p\}$ donc $\mathrm{Ass}\, E(M) = \mathrm{Ass}\, M = \Phi$ et $E(M) \in \mathbf{C}$.

Enfin si $\Phi = V(\mathfrak{a})$ pour tout A-module M de type fini, $\mathrm{Supp}\, M \subset V(\mathfrak{a})$ équivaut à: $\exists n$ tel que $\mathfrak{a}^n M = 0$.

On a vu, au chapitre I, section 2, lemme du théorème de structure des modules artiniens, que si on se donne un anneau strictement linéairement compact A la topologie $T_{\mathbf{C}}(N)$ est égale à la topologie induite par $T_{\mathbf{C}}(M)$ sur N quand M est de la forme A^n/U où U est un sous module fermé de A^n (ce qui a lieu en particulier si M est de prés. finie), et N un sous module de type fini; cependant si A n'est pas noethérien, l'assertion (R) est fausse: en effet d'après (Chap. II, Proposition 2.3), le plus grand sous module de l'injectif essentiel associé à A situé dans $\mathbf{C}$ n'est pas injectif. On est ainsi conduit à étudier un affaiblissement de (R). En reprenant les notations du début de ce paragraphe nous noterons, pour tout A-module à gauche M de type fini, RF(M) la condition suivante.

RF(M): Si N est un sous A-module de M, de type fini, la topologie $T_{\mathrm{C}}(N)$ est égale à la topologie induite par $T_{\mathrm{C}}(M)$ sur N; autrement dit pour tout idéal ouvert $\mathscr{T}$ de A, il existe un autre idéal ouvert $\mathscr{T}'$ tel que $\mathscr{T}N \supset \mathscr{T}'M \cap N$.

Pour tout A-module P, notons, comme au chapitre I, $\mathscr{C}P = \varinjlim_{\mathscr{T}\,\text{ouvert}} \operatorname{Hom}_A(A/\mathscr{T}, P)$, on a alors la

Proposition 1.4. *Soit A un anneau muni d'une topologie linéaire $\mathscr{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) RF(L) *est vérifiée pour tout A-module libre de type fini L.*

(b) RF(P) *est vérifiée pour tout A-module de présentation finie P.*

(c) *Pour tout A-module injectif E, $\mathscr{C}E$ est un sous A-module pur de E.*

Visiblement (b) $\Rightarrow$ (a). Montrons (a) $\Rightarrow$ (b). Soit $O \to M \to L \to P \to O$ une résolution d'un module de présentation finie P où L est libre de type fini. Soit Q un sous A-module de type fini de P, il existe Q' de type fini dans L tel que $\varphi^{-1}(Q) = Q' + M$ et d'après (a) pour tout idéal $\mathscr{T}$ ouvert dans A, il existe un autre idéal ouvert $\mathscr{T}'$ tel que $\mathscr{T}(Q' + M) \supset \mathscr{T}'L \cap (Q' + M)$ donc $\mathscr{T}(Q' + M) + M \supset (\mathscr{T}'L + M) \cap (Q' + M)$ ce qui veut dire que $\mathscr{T}Q \supset \mathscr{T}'P \cap Q$.

(a) $\Rightarrow$ (c). On doit montrer [11, Chap. I, Lemme 2.2] que pour tout diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "j"] \\ L' \arrow[r, "v"] & L \end{tikzcd}$$

avec L' et L libres de type fini, E injectif, u injection canonique, il existe une flèche $w: L \to \mathscr{C}E$ telle que $i = w \circ v$. Or comme L' est de type fini, il existe un idéal $\mathscr{T}$ ouvert tel que $i(\mathscr{T}L') = 0$ et comme $v(L')$ est de type fini, il existe d'après (a) un idéal ouvert $\mathscr{T}'$ tel que $\mathscr{T}v(L') = v(\mathscr{T}L') \supset \mathscr{T}'L \cap v(L')$ et $j(\mathscr{T}'L \cap v(L') \subset j \circ v(\mathscr{T}L') = u \circ i(\mathscr{T}L') = 0$, donc j se factorise en $L \to^{\theta} L/\mathscr{T}'L \cap v(L') \to^{\varphi} E$ et on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}E \arrow[r, "u"] \arrow[dd, "i"'] & E \arrow[dd, "j"] & & \\ & & L/\mathscr{T}'L \cap v(L') \arrow[ul, "\varphi"'] \arrow[r, "t"'] & L/\mathscr{T}'L \otimes L/v(L') \arrow[ull, bend right, "\varphi_1"'] \\ L' \arrow[r, "v"'] & L \arrow[ur, "\theta"'] & & \end{tikzcd} \tag{I}$$

t est l'injection canonique et comme E est injectif, φ se prolonge en φ_1. Si φ_1' est la restriction de φ_1 à $L/\mathscr{T}'L$ et ψ la surjection canonique $L \to L/\mathscr{T}'L$, soit $w = \varphi_1' \circ \psi$, il est alors clair que $w(L) \subset \mathscr{C}E$ d'autre part, pour tout $x \in L'$, $w \circ v(x) = \varphi_1' \circ \psi \circ v(x) = \varphi_1 \circ t \circ \theta \circ v(x) = j \circ v(x) = i(x)$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Soit L un module libre de type fini, P un sous module de type fini de L et $v: L' \to L$ tel que $v(L') = P$. Soit $\bar{v}: L' \to P$ ayant même graphe que v, $\mathscr{T}$ un idéal ouvert et E l'enveloppe injective de $P/\mathscr{T}P$. On a une injection $\sigma: P/\mathscr{T}P \to \mathscr{C}E$ et le diagramme:

$$\begin{tikzcd} L' \arrow[r, "\bar{v}"] \arrow[d, "v"'] & P \arrow[r, "s"] \arrow[dl, "k"'] & P/\mathscr{T}P \arrow[r, "\sigma"] & \mathscr{C}E \arrow[d, "u"] \\ L \arrow[rrr, "j"] & & & E \end{tikzcd} \tag{II}$$

où u est l'injection canonique, s la surjection canonique, k l'injection de P dans L et j un prolongement à L de $u \circ \sigma \circ s: P \to E$. D'après (c) il existe $w: L \to \mathscr{C}E$ tel que $w \circ v = \sigma \circ s \circ \bar{v}$. Comme L est de type fini, il existe un idéal ouvert $\mathscr{T}'$ tel que $\mathscr{T}'w(L) = w(\mathscr{T}'L) = 0$ et si $x \in \mathscr{T}'L \cap P$, il existe $y \in L'$ tel que $v(y) = x$. On a alors $0 = w(x) = w(v(y)) = \sigma \circ s \circ \bar{v}(y)$ et comme σ est injectif $s \circ \bar{v}(y) = 0$, i.e., $x \in \mathscr{T}P$ donc $\mathscr{T}'L \cap P = \mathscr{T}P$. CQFD.

Nous appellerons *topologie d'Artin–Rees* toute topologie linéaire sur A qui vérifie les assertions équivalentes de la Proposition 1.4. On peut noter un premier

COROLLAIRE. *Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux topologies linéaires à gauche sur un anneau A. Si $\mathscr{C}_1 = \mathrm{Sup}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ et $\mathscr{C}_2 = \mathrm{Inf}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ sont des topologies d'Artin–Rees, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont aussi des topologies d'Artin–Rees.*

En effet, pour tout A-module injectif E, $\mathscr{C}_1E = \mathscr{C}E + \mathscr{C}'E$ *et* $\mathscr{C}_2E = \mathscr{C}E \cap \mathscr{C}'E$. La conclusion résulte donc de Proposition 1.4 et de [6, Chap. I, Sect. 2, Exemple 24(c)].

Nous allons donner quelques exemples de topologies d'Artin–Rees. Remarquons d'abord que les sous modules purs d'un module injectif sont purs dans tout module qui les contient, ces modules ont été étudiés récemment et indépendemment par Stenström [15] et mon ami R. Goblot qui les a appelés *absolument purs*. Nous rappelons les résultats obtenus dont nous aurons besoin:

(AP_1). Soit A un anneau, M un A-module. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(a) M est absolument pur.

(b) Pour toute suite exacte $0 \to N \to L \to P \to 0$ où L est libre de type fini et N de type fini, la suite $O \to \mathrm{Hom}_A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(L, M) \to \mathrm{Hom}_A(N, M) \to O$ est exacte.

(c) $\mathrm{Ext}_A{}^1(P, M) = 0$ pour tout module de présentation finie P.

(AP_2). Si A est cohérent à gauche, les assertions de (AP_1) sont équivalentes aux suivantes.

(a′) Pour idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de type fini, l'homomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_A(A, M) \to \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, M)$ est surjectif.

(b′) Si B est un anneau commutatif, ρ: $B \to A$ un homomorphisme de B dans le centre de A et E un B-module fidèlement injectif, le A-module à droite Home(M, E) est plat.

Voici les exemples annoncés:

Proposition 1.5. *Sur un anneau absolument plat toute topologie linéaire est une topologie d'Artin–Rees.*

En effet un tel anneau est cohérent et comme tous les modules sont plats ils sont absolument purs d'après (AP_2)(b′).

Proposition 1.6 (R. Goblot). *Soit A un anneau cohérent commutatif limite inductive plate d'anneaux noethériens $A = \varinjlim_{\alpha \in I} A_\alpha$. Alors pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de type fini, la topologie $\mathfrak{a}$-adique est d'Artin–Rees.*

Lemme. *Pour qu'un A-module E soit absolument pur, il faut et il suffit qu'il soit injectif sur chacun des A_α.*

Soit $\mathfrak{a}_\alpha$ un idéal de A_α. On a le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{A_\alpha}(\mathfrak{a}_\alpha, E) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}_\alpha \otimes_{A_\alpha} A, E) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{A_\alpha}(A_\alpha, E) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_A(A, E).
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{a}_\alpha$ étant de type fini, $\mathfrak{a}_\alpha \otimes_{A_\alpha} A$ est un idéal de type fini de A et si E est absolument pur, la flèche verticale de droite est surjective, il en est donc de même de celle de gauche et E est A_α-injectif. L'implication inverse résulte du fait que tout idéal de type fini de A est de la forme $\mathfrak{a}_\alpha \otimes_{A_\alpha} A$ pour un α convenable.

Démontrons alors la proposition: $\exists \alpha_0 \in I$ tel que $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\alpha_0} \otimes_{A_{\alpha_0}} A$ et on a $A = \varinjlim_{\beta \geqslant \alpha_0} A_\beta$. Si pour tout β, $\mathscr{C}_\beta$ désigne la topologie $\mathfrak{a}_\beta$ adique sur A_β

où $\mathfrak{a}_\beta = \mathfrak{a}_{\alpha_0} \otimes_{A_{\alpha_0}} A_\beta$, on a, pour tout A-module injectif E, $\mathscr{C}_\beta E = \mathscr{C}E$; or comme A_β est noethérien, $\mathscr{C}_\beta$ est d'Artin–Rees donc $\mathscr{C}_\beta E$ est A_β injectif et $\mathscr{C}E$ est absolument pur d'après le lemme. CQFD.

PROPOSITION 1.7. *Soit A un anneau muni d'une topologie d'Artin–Rees. Alors les conclusions de la Proposition* 1.2 *restent valables à condition de prendre M, N et P de présentation finie.*

En effet, en reprenant la démonstration de Proposition 1.2, E' est cette fois absolument pur et d'après (AP_1)(c) la suite $0 \to \mathrm{Hom}_A(P, E') \to \mathrm{Hom}_A(N, E') \to \mathrm{Hom}_A(M, E') \to 0$ est exacte.

Enfin dans le cas cohérent, on a une caractérisation plus simple des topologies d'Artin–Rees.

PROPOSITION 1.8. *Soit A un anneau cohérent à gauche muni d'une topologie linéaire à gauche $\mathscr{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *$\mathscr{C}$ est d'Artin–Rees.*

(b) RF(A) *est vérifiée.*

On doit seulement montrer que (b) $\Rightarrow$ (a). Soit E un A-module injectif, $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche de type fini. D'après (AP_2)(a') il faut montrer que tout homomorphisme $f\colon \mathfrak{a} \to \mathscr{C}E$ se relève en $g\colon A \to \mathscr{C}E$. Comme $\mathfrak{a}$ est de type fini, il existe un idéal ouvert tel que $\mathscr{T}f(\mathfrak{a}) = f(\mathscr{T}\mathfrak{a}) = 0$ et comme RF(A) est vérifiée, il existe un idéal ouvert $\mathscr{T}'$ tel que $\mathscr{T}\mathfrak{a} \supset \mathscr{T}' \cap \mathfrak{a}$ donc f se factorise en $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}/\mathscr{T}' \cap \mathfrak{a} \xrightarrow{f_1} \mathscr{C}E$; f_1 se prolonge en $g_1\colon A/\mathscr{T}' \to E$ puisque E est injectif et comme $g_1(A/\mathscr{T}') \subset \mathscr{C}E$ on voit qu'on peut prendre $g = g_1 \circ \varphi$ où φ est la surjection canonique $A \to A/\mathscr{T}'$.

2. *Applications à la platitude du séparé complété d'un anneau cohérent*

PROPOSITION 2.1. *Soit A un anneau cohérent à gauche muni d'une topologie linéaire à gauche $\mathscr{C}$. Pour que le séparé complété $\hat{A}$ de A soit un A-module à droite plat, il suffit que $\mathscr{C}$ soit une topologie d'Artin–Rees et que le foncteur complétion soit exact à droite sur la sous catégorie pleine de* Mod A *des modules de présentation finie.*

En effet, le séparé complété $\hat{\mathfrak{a}}$ d'un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A muni de la topologie déduite de celle de A s'identifie à $\hat{A} \otimes_A \mathfrak{a}$ et comme $\mathscr{C}$ est d'Artin–Rees, $\hat{\mathfrak{a}}$ s'injecte dans $\hat{A}$ (cf. Chap. II, Proposition 1.6).

Les hypothèses de cette proposition sont vérifiées quand $\mathscr{C}$ est d'Artin–Rees et artinienne (Bourbaki, théorie des Ensembles [6, Chap. III, Sect. 7, n° 4, Théorème I, Exemple II]), ou bien quand $\mathscr{C}$ est d'Artin–Rees et qu'il y a un ensemble dénombrable d'idéaux formant un système fondamental de voisinages de 0 [6, Chap. III, Sect. 2, Proposition 1.5, Lemme 2].

Voyons une première application aux anneaux de séries formelles:

PROPOSITION 2.2. *Soit A un anneau noethérien commutatif, $\mathfrak{a}_0$ un idéal de A; $B = A[X_i]_{i \in I}$ un anneau de polynomes sur A (I ensemble quelconque), $\mathfrak{a}$ l'idéal de B formé des polynomes dont le coefficient constant $\in \mathfrak{a}_0$, alors le séparé complété de B pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique s'identifie à l'anneau de séries formelles $\hat{A}[[X_i]]_d$, chacune n'ayant qu'un nombre fini de termes de degré donné et c'est un $A[X_i]$-module plat ($\hat{A}$ est le séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{a}_0$-adique).*

En vertu de ce qui précède, il suffit de vérifier que la topologie $\mathfrak{a}$-adique sur B est d'Artin–Rees et comme B est cohérent, il suffit de vérifier RF(B) (Proposition 1.8). Pour toute partie finie J de I, posons $B_J = A[X_i]_{i \in J}$ et $\mathfrak{a}_J = \mathfrak{a} \cap B_J$; il est clair que $\mathfrak{a}_J{}^n = \mathfrak{a}^n \cap B_J$. Soit $\mathscr{B}$ un idéal de type fini de B engendré par $P_1, P_2, ..., P_m$. Il existe un sous ensemble fini J de I tel que $P_1, P_2, ..., P_m \in B_J$ et tout élément u de $\mathscr{B}$ peut s'écrire sous la forme $u = \sum_{\lambda \in \bar{J}} (\sum_{i=1}^m A_\lambda{}^i P_i) X^\lambda$ où les $A_\lambda{}^i \in B_J$ et $\bar{J} = \{(x_i) \in N^{(I)} \mid Pr_j((n_i)) = 0$ si $j \in J\}$. Posons encore $\mathscr{B} \cap B_J = \mathscr{B}_J$. Soit alors n un entier positif, comme $\mathscr{B}_J$ est noethérien $\exists n'$ tel que $\mathfrak{a}_J{}^n \mathscr{B}_J \supset \mathfrak{a}_J^{n'} \cap \mathscr{B}_J$, je dis que $\mathfrak{a}^n \mathscr{B} \supset \mathfrak{a}^{n+n'} \cap \mathscr{B}$. En effet, soit $u = \sum_{\lambda \in J} (\sum_{i=1}^m A_\lambda{}^i P_i) X^\lambda \in \mathfrak{a}^{n+n'} \cap \mathscr{B}$, il est clair que $\sum_{|\lambda| \geqslant n} (\sum_{i=1}^m A_\lambda{}^i P_i) X^\lambda \in \mathfrak{a}^n \mathscr{B}$ et pour $|\lambda| < n$, $\sum_{i=1}^m A_\lambda{}^i P_i \in \mathfrak{a}_J^{n+n'-|\lambda|} \cap \mathscr{B}_J \subset \mathfrak{a}_J^{n'} \cap \mathscr{B}_J \subset \mathfrak{a}_J{}^n \mathscr{B}_J$.

Remarque. Le "gros" anneau de séries formelles $\hat{A}[[X_i]]$ est aussi un $A[X_i]$-module plat: comme $\hat{A}[X_i]$ est un $A[X_i]$-module plat on peut tout d'abord supposer que $A = \hat{A}$. Si $\mathscr{B}$ est un idéal de type fini de B, $\exists J$ fini $\subset I$ tel que $\mathscr{B} = \mathscr{B}_J \otimes_{B_J} B$ et $A[[X_i]]_{i \in I} \otimes_B \mathscr{B} = A[[X_i]]_{i \in I} \otimes_{B_J} \mathscr{B}_J$ et comme $A[[X_i]]_{i \in I} = A[[X_i]]_{i \in J}[[X_i]]_{i \notin J}$, l'application canonique $A[[X_i]]_{i \in I} \otimes_{B_J} \mathscr{B}_J \to A[[X_i]]_{i \in I}$ s'identifiant à l'application $B_J[[X_i]]_{i \notin J} \otimes_{B_J} \mathscr{B}_J \to B_J[[X_i]]_{i \notin J}$ on est ramené à prouver que $B_J[[X_i]]_{i \notin J}$ est un B_J-module plat, or ceci est évident puisque le B_J-module $B_J[[X_i]]_{i \notin J}$ s'identifie à $(B_J)^{N^{(I-J)}}$ et que B_J est noethérien.

PROPOSITION 2.3. *Soit A un anneau muni d'une topologie linéaire artinienne à gauche $\mathscr{C}$. Considérons les assertions:*

(i) *$\mathscr{C}$ est d'Artin–Rees.*

(ii) *Il existe un A-module fidèlement injectif E tel que $\mathscr{C}E$ soit absolument pur.*

(iii) *$\hat{A}$ est un A-module à droite plat.*

Alors (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftarrow$ (iii) et si A est cohérent à gauche les trois assertions sont équivalentes.

(i) $\Rightarrow$ (ii) en vertu de la proposition 1.4.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Considérons le diagramme (II) de la démonstration de Proposition 1.4 dans lequel σ est modifié comme suit: soit $s(\mathscr{T}_0 L \cap P)$ un élément minimal parmi les $s(\mathscr{T} L \cap P)$ pour $\mathscr{T}$ ouvert dans A. Supposons que $s(\mathscr{T}_0 L \cap P) \neq \{0\}$ alors on prend $\sigma: P/\mathscr{T}P \to \mathscr{C}E$ ne s'annulant pas sur $s(\mathscr{T}_0 L \cap P)$ (c'est possible puisque E est fidèlement injectif) et soit encore $w: L \to \mathscr{C}E$ correspondant à σ et $\mathscr{T}'$ un idéal ouvert tel que $\mathscr{T}' w(L) = 0$. On voit alors que $\sigma(s((\mathscr{T}_0 \cap \mathscr{T}')L \cap P)) = 0$ ce qui est absurde puisque $s((\mathscr{T}_0 \cap \mathscr{T}')L \cap P) = s(\mathscr{T}_0 L \cap P)$ en vertu du caractère minimal de $s(\mathscr{T}_0 L \cap P)$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). La démonstration est simple si A est commutatif et cohérent: on prend en effet pour E l'injectif essentiel associé à A (Ch. I, Sect. 2), alors $\hat{A} = \operatorname{Hom}_A(\mathscr{C}E, E)$ (Chap. II, Proposition 1.1) donc si $\hat{A}$ est plat, $\mathscr{C}E$ est absolument pur, en vertu de $((\mathrm{AP}_2)(\mathrm{b}'))$, en prenant $B = A$).

Si A n'est ni commutatif, ni cohérent; la démonstration est dûe à Goblot [9, Chap. V, Proposition 13].

Enfin, on a vu que si A est cohérent à gauche (i) $\Rightarrow$ (iii). Si on ne suppose pas que la topologie $\mathscr{C}$ est artinienne, Goblot a donné un exemple qui montre que l'on peut avoir (iii) sans avoir (i): on prend un anneau de valuation de rang 1 et linéairement compact pour la topologie discrète [6, Chap. III, Sect. 2, Exemple 15] A, f un élément $\neq 0$ et 1 de A et $B = A/Af^2$ muni de la topologie des idéaux non nuls, alors $B = \hat{B}$ mais si $\mathfrak{a} = Af$ et $\mathscr{T} = Af$, alors $\mathscr{T}\mathfrak{a} = 0$ ne contient aucun $\mathscr{J} \cap \mathfrak{a}$ pour $\mathscr{J}$ non nul.

3. *Contremodule d'un cogénérateur injectif*

Le lemme de densité du paragraphe 1 va nous permettre d'étudier le contremodule d'un module fidèlement injectif. Nous poserons les notations suivantes: A est un anneau non nécessairement commutatif, E un A-module fidèlement injectif, $R = \operatorname{Hom}_A(E, E)$.

PROPOSITION 3.1. *Le R-module E est absolument pur et c'est une extension essentielle de son socle.*

Nous dirons qu'un R-module M' est représentable par un A-module M si $M' = \operatorname{Hom}_A(M, E)$, on a alors

LEMME. *Tout sous R-module de type fini d'un R-module représentable est représentable.*

En effet, soit $M' = \operatorname{Hom}_A(M, E)$ et N' un sous R-module de type fini engendré par $f_1, f_2, \dots, f_n: M \to E$. Comme E est injectif, $N' = \operatorname{Hom}_A(M/\bigcap_{i=1}^m \ker f_i, E)$. Montrons alors que E est R-absolument pur:

soit $O \to N \to L \to P \to O$ une suite exacte de R-modules où L est libre de type fini et N de type fini. Alors L est de la forme $\mathrm{Hom}_A(E^n, E)$ et N de la forme $\mathrm{Hom}_A(E^n/\bigcap_{i=1}^m \ker f_i, E)$ d'après le lemme si $N = \sum_{i=1}^m Rf_i$ et comme $E^n/\bigcap_{i=1}^m \ker f_i$ est un sous R-module de E^m, on peut écrire d'après le lemme densité (Sect. 1):

$$\mathrm{Hom}_R(N, E) = \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{Hom}_A\left(E^n\Big/\bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i\,, E\right), E\right) \simeq E^n\Big/\bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i$$

d'autre part $\mathrm{Hom}_R(L, E) = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_A(E^n, E), E) \simeq E^n$ et on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P, E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(L, E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(N, E) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \\
0 & \longrightarrow & \bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i & \longrightarrow & E^n & \longrightarrow & E^n\Big/\bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

ce qui montre que la première suite horizontale est exacte et donc que E est R-absolument pur (Sect. 1 (AP_1)(b)).

Pour tout élément x de E on a $Rx = \mathrm{Hom}_A(Ax, E)$ et le lemme ci-dessus montre donc que si Ax est A-simple, Rx est R-simple. Maintenant si $y \in E$ n'est pas nul, il existe un idéal maximal m de A contenant $\mathrm{Ann}_A\, y$. Comme E est un cogénérateur dans Mod A, il existe $x \in E$ tel que $Ax \simeq A/m$ donc $v\colon E \to E$ tel que $v(y) = x$ puisque $\mathrm{Ann}_A\, y \subset \mathrm{Ann}_A\, x$ et $Rx \subset Ry$; ce qui démontre la deuxième partie de la proposition.

Les notions de module absolument pur et de module injectif étant assez voisines, on peut se demander si E n'est pas R-injectif. La proposition suivante montre qu'il n'en est rien en général.

Proposition 3.2. *A est maintenant supposé commutatif.*

Avec les mêmes notations supposons E R-injectif. Soit $\mathscr{C}$ la topologie sur A ayant pour système fondamental de voisinages de O les intersections finies d'idéaux abrités, $\hat{A}$ le séparé complété et E' l'enveloppe injective du socle de E. Alors $\hat{A}$ est un anneau linéairement compact pour la topologie discrète (en abrégé l.c.d.), *E' a une structure de $\hat{A}$-module et c'est un $\hat{A}$ cogénérateur injectif, extension essentielle de son socle. Autrement dit $\hat{A}$ possède une dualité de Morita induite par E', en suivant la terminologie de* [14].

La démonstration se fait en plusieurs étapes. Nous aurons à utiliser la notion de module linéairement compact telle qu'elle est développée dans les exercices 15 à 20 du [6, Chap. III, Sect. 2].

(1) E est un A-module lcd: soit M un sous A-module de E, on sait que l'application $\psi: E/M \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_A(E/M, E), E)$ est injective or $\mathrm{Hom}_A(E/M, E)$ est un idéal de $\mathrm{Hom}_A(E, E) = R$ donc comme E est supposé R-injectif, tout R-homomorphisme α: $\mathrm{Hom}_A(E/M, E) \to E$ peut se définir par $\alpha(u) = u(x)$ pour un $x \in E/M$ et ψ est surjective. Si maintenant $(M_i)_{i\in I}$ est une famille filtrante décroissante de sous A-modules de E, $\varprojlim E/M_i = \mathrm{Hom}_R(\varinjlim \mathrm{Hom}_A(E/M_i, E), E)$ or on a une injection $\varinjlim \mathrm{Hom}_A(E/M_i, E) \to \mathrm{Hom}_A(E, E) = R$ donc une surjection $E = \mathrm{Hom}_R(R, E) \to \mathrm{Hom}_R(\varinjlim \mathrm{Hom}_A(E/M_i, E), E) = \varprojlim E/M_i$ ce qui prouve que E est complet pour la topologie définie par les $(M_i)_{i\in I}$.

(2) Le socle de E est alors de longueur finie (Exercice 20(a)), ce qui montre déjà qu'il n'y a qu'un nombre fini de types de modules simples dans Mod A. Soit alors E' l'enveloppe injective de ce socle qui est donc aussi l.c.d. Posons $R' = \mathrm{Hom}_A(E', E')$.

LEMME. *R' est un anneau* l.c.d. *et E' est un cogénérateur injectif de* Mod R', *extension essentielle de son socle.*

Le lemme est un cas particulier du théorème de Morita de [9, Chap. V, Théorème 9] nous donnons une démonstration directe.

Tout idéal $\mathscr{T}$ de R' est représentable: soit $I = \bigcap_{f\in\mathscr{T}} \ker f$, alors $\mathrm{Hom}_A(E'/I, E') \supset \mathscr{T}$. Inversement soit $\varphi: E'/I \to E'$, $\ker \varphi$ est intersection finie de modules abrités dans E'/I puisque $\mathrm{Im}\, \varphi$ est extension essentielle de son socle qui est de longueur finie donc $\ker \varphi$ contient un $\ker f$, car dans un module l.c.d. la topologie définie par les intersections finies de sous modules abrités est la moins fine des topologies séparées (Exercice 18). D'autre part $\psi: E'/I \to \mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_A(E'/I, E'), E')$ est surjective puisque $\mathrm{Im}\, \psi$ est à la fois dense (lemme de densité) et fermé (Exemple 16). On a donc le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{R'}(R', E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{R'}(\mathscr{T}, E) & & \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle x} & & \\
E' & \longrightarrow & E'/I & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

les deux flèches verticales sont des isomorphismes donc la flèche $\mathrm{Hom}_{R'}(R', E) \to \mathrm{Hom}_{R'}(\mathscr{T}, E)$ est surjective et E est bien R'-injectif. R' est l.c.d.: soit $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ un système filtrant décroissant d'idéaux de R' et pour tout i posons $I_i = \bigcap_{f\in\mathscr{T}_i} \ker f$, alors $R'/\mathscr{T}_i = \mathrm{Hom}_A(I_i, E')$ et $\varprojlim R'/\mathscr{T}_i = \mathrm{Hom}_A(\varinjlim I_i, E')$, il en résulte que la flèche $R' = \mathrm{Hom}_A(E', E') \to \varprojlim R'/\mathscr{T}_i$ est une surjection.

Enfin tout idéal maximal m' de R' est représentable et $\exists x \in E'$ tel que

$R'/m' = \mathrm{Hom}_A(Ax, E') = R'x$. E' est une R'-extension essentielle de son socle d'après Proposition 3.1.

(3) Pour un module quelconque, il revient au même de dire que son socle est de longueur finie et qu'il en est extension essentielle ou de dire que 0 est une intersection finie de sous modules abrités. Donc si $\mathcal{T}$ est un idéal du système fondamental de voisinages ouverts de $\mathscr{C}$, $A/\mathcal{T}$ se plonge dans un E'^n et le lemme de densité montre que $A/\mathcal{T} = \mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_A(A/\mathcal{T}, E'), E')$ donc $\hat{A} = \mathrm{Hom}_{R'}(E', E')$ puisque $\varinjlim \mathrm{Hom}_A(A/\mathcal{T}, E') = E'$. D'autre part comme l'annulateur de toute famille finie d'éléments de E' est ouvert pour $\mathscr{C}$, on peut munir E' d'une structure de $\hat{A}$-module (comme dans la démonstration du théorème de structure des modules artiniens au chapitre I) et il y a alors identité entre sous $\hat{A}$-modules et sous A-modules de E' qui est donc $\hat{A}$-l.c.d. Cette structure de $\hat{A}$-module n'est autre que la structure de contremodule du R'-module E'.

(4) D'après (2) E' est un cogénérateur injectif de Mod R', donc E' est $\hat{A}$-absolument pur d'après Proposition 3.1 et comme il est aussi $\hat{A}$-l.c.d. d'après (3), il est $\hat{A}$-injectif [9, Chap. V, Lemme 14].

(5) Enfin puisque E' est $\hat{A}$-injectif, $\hat{A}$ est un anneau l.c.d. et E' est un cogénérateur injectif de Mod $\hat{A}$, extension essentielle de son socle par application de (2) où A est remplacé par R' et R' par $\hat{A}$. En particulier, il résulte facilement de (Chap. I, Proposition 2.2) que $\hat{A}$ est un A-module à droite fidèlement plat.

Bibliographie

1. B. Ballet, Idéaux maximaux associés à un module artinien, *C. R. Acad. Sci. Paris* **263** (1966), 758–761.
2. B. Ballet, Structure des modules artiniens (cas commutatif), *C. R. Acad. Sci. Paris* **266** (1968), 1–4.
3. B. Ballet, Structure des anneaux strictement linéairement compacts commutatifs, *C. R. Acad. Sci. Paris* **266** (1968), 1113–1116.
4. B. Ballet, Topologies linéaires sur un anneau cohérent, *C. R. Acad. Sci. Paris* **270** (1970), 1209–1211.
5. N. Bourbaki, "Algèbre," Livre II, Hermann, Paris.
6. N. Bourbaki, "Algèbre commutative," Hermann, Paris.
7. N. Bourbaki, "Topologie générale," Livre III, Hermann, Paris.
8. P. Gabriel, Des catégories abéliennes, Thèse, Paris, 1960.
9. R. Goblot, Thèse, à para^tre.
10. A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique, *I.H.E.S.*
11. D. Lazard, Autour de la platitude, Thèse, Paris, 1968.
12. E. Matlis, Injective modules over Noetherian rings, *Pacific J. Math.* **8** (1958), 511–588.

13. E. MATLIS, Modules with descending chain condition, *Trans. Amer. Math. Soc.* **97** (1960).
14. B. MÜLLER, Linear compactness and Morita duality, *J. Algebra* (1970), à paraître.
15. B. STENSTRÖM, Cohérent rings and *FP*-injective modules, *J. London Math. Soc.* **7** (1967).